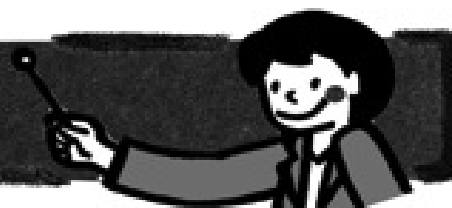


講義録



量子少数系におけるユニバーサリティと Efimov¹ 状態の物理²

遠藤 晋平

東北大学 学際科学フロンティア研究所、理学研究科物理学専攻

多粒子系が示す相転移・臨界現象では、気液相転移と強磁性転移の例をはじめ、全く異なる系が統一的に理解できるユニバーサリティという重要な概念があります。実は少数粒子系においても、原子、原子核、固体電子系などが全く同じ量子少数系の現象を示すことがあり、このようなユニバーサリティに注目した研究が進んでいます。本講義では、量子少数系の物理を、ユニバーサリティに着目しながら解説します。まず、量子少数粒子系を記述する理論手法を学部レベルの量子力学のみを用いて解説し、粒子間の散乱長とユニバーサリティの関係を解説します。そして、ユニバーサルな量子少数現象の代表例である Efimov 状態と呼ばれる 3 粒子現象について解説し、これが原子、原子核、固体電子系など様々な系で普遍的に現れることを、原子気体、原子核、中性子過剰核、固体電子系での実験観測などと併せて紹介します。また、Efimov 状態以外のユニバーサルな量子少数現象や、4 粒子、5 粒子以上での普遍的な量子少数多体現象に関する最近の研究についても紹介します。

目次

1	Introduction	2
2	2 体問題	4
2.1	低エネルギー散乱と有効レンジ展開	5
2.2	束縛状態、バーチャル状態、共鳴状態	7
2.3	散乱長と有効レンジの物理的意味と性質	8
2.4	擬ポテンシャル (Pseudo potential) の方法	12
2.4.1	実空間での解析に適した方法	12
2.4.2	運動量空間での解析に適した方法	14

¹Efimov の正しい発音は「ィエフィモッフ」(フィにアクセントが来る)。

²この講義録は 2019 年 2 月 25 日-27 日に、京都大学基礎物理学研究所で行われた集中講義の講義録です (2025 年 10 月 23 日誤植改定版)。

2.5	冷却原子における Feshbach 共鳴による散乱長の制御 ³	16
2.6	物理系への適用例	17
3	3 体問題の理論的手法	19
3.1	実空間の方法：Hyper-spherical 座標の方法	19
3.2	運動量空間の方法：Skorniakov–Ter-Martirosian 方程式の方法	28
3.3	Efimov 状態のユニバーサリティ	32
4	Efimov 状態の物理的理解をさらに深める理論	32
4.1	Born-Oppenheimer 近似	32
4.2	繰り込み群	36
4.3	Finite-range effects と現実的なモデルポテンシャルにおける Efimov 状態の挙動 . .	39
5	物理系における Efimov 現象の観測・予言	39
5.1	冷却原子気体	40
5.2	⁴ He 原子クラスター	43
5.3	三重水素 ³ H 核	45
5.4	¹² C 核の励起状態 (Hoyle 状態)	47
5.5	中性子過剰核。ハロー核	49
5.6	磁性体	51
5.7	Dynamical Efimov expansion	52
6	Efimov 状態を超えて	53
6.1	4 体、5 体、6 体.....	53
6.2	量子少数系と多体系のつながり	55
6.3	フェルミ粒子系における Efimov 状態や、Efimov 状態と異なるユニバーサル状態 .	58
7	まとめ	63

1 Introduction

2018 年に Vitaly Efimov と Rudolf Grimm が第一回 Faddeev Medal を受賞しました。これは、量子少数系の研究で著名な Faddeev の名を冠した、少数系の顕著な研究に対して贈られる賞です。その受賞内容は、1970 年にロシア人の Vitaly Efimov が理論的に予言した特異な 3 粒子束縛状態を [1]、2000 年代にオーストリアの Rudolf Grimm のグループが冷却原子の実験で初めて明瞭に観測した [2]、というものです。この 3 粒子束縛状態は、現在では Efimov 状態と呼ばれており、多くの非常に興味深い性質を持ちます。最も特徴的なものは離散スケール不変性です：3 粒子束縛状態が 1 つ存在したならば、22.7 倍スケール倍した形 (波動関数) をした状態も存在し、さらに 22.7 倍した状態も存在する..... ということが無限に続きます。Efimov 状態のこの性質を、発見し

³ドイツ人ではなく、アメリカ人で「フェッシュバック」と正しくは発音します。が、「フェッシュバックハ」と発音されることが国内・海外ともに多いです。また、類似の Fano 共鳴と呼ばれる現象を原子分子物理学の分野で発見した Fano と併せて、「Fano-Feshbach 共鳴」と呼ばれたりもします。

た Efimov がロシア人であることにかこつけて、ロシア人形のマトリョーシカのような状態と喩えることもあります。同じ形でサイズ違いの人形が次から次へと現れていく様子は、まさに Efimov 状態の最も卑近で良い喩えになっています。

この Efimov の予言は以下のたった 2 つの仮定のもとに厳密に示されました [1, 3] :

条件 1 非相対論的 Schrödinger 方程式に従う 3 粒子同種ボース粒子。

条件 2 粒子間の 2 体相互作用は短距離型相互作用であり、その s 波散乱長が非常に大きい

つまり、この仮定が成立していれば、どのような物理系であっても 22.7 という普遍定数をスケール因子として持つ多数の 3 体束縛状態が必ず現れるのです。この非常に一般的で驚くべき発見は、Efimov が発見した当初は他の研究者に懐疑的に受け止められたようです。しかし、Efimov の予言を間違っていると思い反証しようとした人々も逆に Efimov と同じ結論を得る [4] などし、少しずつ正しいだろうと受け入れられていったようです。また、同種ボース粒子系のみならず、Fermi 系や異種粒子混合系においても 3 つの粒子間の s 波散乱長が非常に大きければ、やはり Efimov 状態が現れることも発見されました [3]。さらに、 ^4He 原子のクラスター [5] や中性子過剰核のハロー状態 [6] においても Efimov 状態やそれに類する状態が現れるという予言もされるようになり、徐々に人々の注目を集めるトピックになっていきました。しかし「散乱長が非常に大きい」という条件を満たす物理系が自然界に非常に稀有なため、Efimov の予言を明瞭に観測することは長い間できなかったのです。

しかし 2000 年ごろになり、冷却原子気体の実験において、粒子間の散乱長を自由自在にコントロールできる技術が確立しました。この技術を用いて条件 2 を満たす原子気体を用意することで、Efimov 状態がインスブルック大学の Grimm のグループで初めて明瞭に観測されました。さらにその直後、2009 年に他の 3 つの実験グループも独立に Efimov 状態を観測し、その予言である「22.7 倍」という普遍的スケール因子を検証することに成功しました [7, 8, 9]。さらに、2015 年には ^4He 原子のクラスターにおいても Efimov 状態が観測され、その波動関数の形状の直接観測にも成功しています [10]。

この Efimov 状態に関する 50 年近い歴史を Efimov 自身も次のように回想しています [11]:

“On a personal note, I well remember the time when the giant trimers made outstanding physicists raise their eyebrows. It has been heartening to witness the evolution of this miracle of quantum mechanics from questionable to pathological to exotic to being a hot topic of today’s ultracold physics. The fairytale is becoming a reality.”

彼が「hot topic」と言う通り、Efimov 状態に関する研究は、冷却原子や ^4He 原子のクラスターや、Efimov が現論文で考察した三重水素核や ^{12}C の Hoyle 状態のみならず、中性子過剰核の研究や、ハドロン系の 3 体状態に関する研究など様々な物理系で行われています。表 1 に、現在 Efimov 状態が観測されている、もしくは現れるだろうと理論的に予言されている物理系を列挙します。これらの系では、粒子間相互作用の性質やその起源が全く異なり、エネルギースケールも最大 17 桁も異なります。そのように全く階層・スケール・分野が異なる系であるにも関わらず、「とある条件の下で」これらの系で現れる 3 粒子現象が Efimov 理論で統一的に理解できる。そして「22.7」という普遍定数による離散スケール普遍性が現れるのです。

本講義では、この Efimov 状態の物理を、特にそのユニバーサリティという側面に着目しながら解説します。まず、Efimov 状態に関する理論的背景を第 2 節と第 3 節で解説します。第 2 節と

表 1: Efimov 状態が観測・予言された物理系の一覧。◎：Efimov 状態が基底状態のみならず励起状態まで観測され、明確に実証された系。○：Efimov 状態の基底状態と見られる 3 体状態が 1 つ観測されたが、有限レンジ効果等によりその同定が明確ではない系。×：未観測な系。束縛エネルギーは、3 粒子がバラバラになる 3-body continuum threshold を基準とした際の束縛エネルギー。

物理系	構成要素	束縛エネルギー	大きさ	2 体相互作用の性質	観測
冷却原子	原子 3 つ	10 nK -10 mK	10-500 nm	原子間力 (短距離斥力+ r^{-6} 遠方引力)	◎
^4He クラスター	^4He 原子 3 つ	2.6 mK (励起状態) 132 mK (基底状態)	1-10 nm	原子間力 (短距離斥力+ r^{-6} 型遠方引力)	◎
三重水素 ^3H 核	陽子 1 つ +中性子 2 つ	8.48 MeV (1 MeV= 1.2×10^{10} K)	1.6 fm	NN 相互作用 (短距離斥力+ $e^{-\mu r}/r$ 型遠方引力)	○
^{12}C 核 (Hoyle 状態)	α 粒子 3 つ	0.378 MeV	数 fm	α 粒子間の核力+Coulomb 斥力	○
中性子過剰核 (ハロー状態)	中心核 1 つ +中性子 2 つ	$\lesssim$ 数 MeV	1-10 fm	中心核と中性子の間の核力 +中性子 ($\uparrow\downarrow$ スピン) 間の相互作用	○
磁性体	マグノン 3 つ	~ 0.1 -10 K	0.1-10 nm	マグノン間相互作用 (on-site, nearest-neighbor 相互作用)	×

3 節では比較的フォーマルな 2 体・3 体問題の記述や Efimov 状態を記述する理論を解説します。そして第 4 節では Efimov 状態の重要な性質を解説していきます。第 5 節では、冷却原子、 ^4He 原子のクラスター、固体電子系、三重水素 ^3H 核、 ^{12}C 核の Hoyle 状態、中性子過剰核のハロー状態、という実際の物理系において、Efimov 状態がどのように現れ得るか、を現状での実験観測の紹介も交えて行います。第 6 節では Efimov 状態のパラダイムを拡張するような最近の研究をいくつか紹介します。特に、(i)4 粒子、5 粒子、6 粒子系ではどうなるか？、(ii) 量子多体現象と 3 体現象 (Efimov 状態) との関係、(iii)Efimov 状態と異なるユニバーサルな 3 粒子束縛状態、などについて解説します。本講義録以外にも、Efimov 状態については英語のレビュー論文や解説記事がいくつかあります [12, 13, 14, 15, 16, 17]。特に 2017-2018 年に出版された 3 つのレビュー論文 [15, 16, 17] には最近の研究まで紹介されているので、より深く理解したい方はそちらもご参照ください。

2 2 体問題

2 粒子の非相対論的 Schrödinger 方程式を考えます⁴。重心運動と相対運動は分離した、相対運動の波動関数 $\psi(\mathbf{r})$ は (この講義録を通して $\hbar = 1$ とします)

$$\left[-\frac{1}{2\mu_{12}} \nabla_{\mathbf{r}}^2 + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}), \quad (1)$$

という Schrödinger 方程式を解くことで得られます。ここで $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ は 2 粒子の相対座標、 $\mu_{12} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ は換算質量。中心力 $V(\mathbf{r}) = V(r)$ で相互作用する球対称な場合、角運動量 ℓ が良い量子数になり、

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_{\ell}(r) Y_{\ell,m}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (2)$$

⁴通常の量子力学の教科書 [18] などを参照。

と角運動量状態で固有状態は表されます。そのため、波動関数の遠方での挙動

$$\psi(\mathbf{r}) \rightarrow e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (r \gg b) \quad (3)$$

を特徴づける散乱振幅 $f(\theta)$ についても

$$f(\theta) = \sum_{\ell} (2\ell + 1) f_{\ell}(k) P_{\ell}(\cos \theta) \quad (4)$$

と部分波展開が出来ます。 ℓ 波散乱の散乱振幅は

$$f_{\ell}(k) = \frac{S_{\ell}(k) - 1}{2ik} = \frac{1}{k \cot \delta_{\ell}(k) - ik}. \quad (5)$$

のように ℓ 波の位相シフト (phase shift) $\delta_{\ell}(k)$ と、S 行列 $S_{\ell}(k) = e^{2i\delta_{\ell}(k)}$ を用いて表せます。実際、 $V(r)$ が短距離型のポテンシャルで $r \gtrsim b$ で $V(r) = 0$ となるように有限の到達距離 b が定義できる場合、波動関数の部分波は遠方で

$$r\psi_{\ell}(r) = \begin{cases} \text{複雑な挙動} & (r \ll b) \\ \sin\left[kr - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_{\ell}(k)\right] & (r \gg b) \end{cases} \quad (6)$$

となり、 $V(r) = 0$ の場合の波動関数 $\sin\left[kr - \frac{\ell\pi}{2}\right]$ と比べて δ_{ℓ} の位相だけズレています。散乱振幅は、散乱微分断面積 $d\sigma/d\Omega$ や散乱断面積 σ と

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \quad \sigma = 4\pi \sum_{\ell} (2\ell + 1) |f_{\ell}(k)|^2 \quad (7)$$

のように関係しています。従って、散乱振幅が「散乱の強さ」を測る指標になっています。特に、以下の特徴的な位相シフトの値があります。

最小の位相シフト $\delta_{\ell} = \pi n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$): 遠方では、あたかもポテンシャルが無いかのように波動関数が振舞う。

最大の位相シフト $\delta_{\ell} = +\frac{\pi}{2} + \pi n$: ユニタリー極限 (unitary limit) や、ユニタリー散乱と呼びます。実際、弾性散乱の場合は S 行列はユニタリー行列であり、その条件 $|S_{\ell}(k)| = 1$ から導かれる不等式

$$|f_{\ell}(k)| = \frac{|S_{\ell}(k) - 1|}{2k} \leq \frac{|S_{\ell}(k)| + 1}{2k} = \frac{1}{k} \quad (8)$$

の等号成立条件を満たす必要十分条件になっています。なので、ユニタリー極限が「最大の弾性散乱をする上限 (極限)」になっています。

2.1 低エネルギー散乱と有効レンジ展開

陽子や中性子といった核子間に働く相互作用のように、遠方で指数関数的に減衰する短距離型相互作用 $V(r)$ の場合、低エネルギー $k \rightarrow 0$ で、有効レンジ展開

$$k^{2\ell+1} \cot \delta_{\ell}(k) = c_0 + c_1 k^2 + c_2 k^4 + \dots \quad (9)$$

ができることが知られています。これより、低エネルギー $k \rightarrow 0$ では $f_\ell(k) \propto k^{2\ell}$ かつ $\delta_\ell \propto k^{2\ell+1}$ となります。すなわち、低エネルギー散乱では、角運動量の大きな散乱は無視でき、 $\ell = 0$ の S 波の散乱のみが効きます。S 波散乱は特に

$$k \cot \delta_0(k) = -\frac{1}{a} + \frac{r_{\text{eff}}}{2} k^2 + O(k^4), \quad (10)$$

と展開されます。ここで、 a は s 波散乱長 (s-wave scattering length)、 r_{eff} は有効レンジ (effective range) と呼ばれます。この有効レンジ展開を用いることで、散乱振幅は式 (5) より

$$f_0(k) = \frac{1}{-1/a + \frac{r_{\text{eff}}}{2} k^2 - ik}, \quad f_{\ell>0}(k) = 0 \quad (11)$$

と低エネルギーで振舞うということが分かります。

有効レンジ展開は、核子間のような指数的に遠方で減衰する場合には直ちに用いれる一方、原子分子に対して適用する際には注意が必要です。冷却原子で扱う中性原子間には、遠方で van der Waals 相互作用が働き、 $-1/r^6$ のように減衰します。これは上記の指数関数的に減衰するポテンシャルの場合とやや異なります。 $-1/r^6$ 型の相互作用をする 2 体問題の解析解は知られていて⁵、それによると、式 (9) は以下のように修正が必要です [18, 22, 23]:

$$k \cot \delta_{\ell=0}(k) = -\frac{1}{a} + \frac{r_{\text{eff}}}{2} k^2 + O(k^3), \quad (12)$$

$$k^3 \cot \delta_{\ell=1}(k) = -\frac{1}{v_p} + r_p^{(1)} k + O(k^2), \quad (13)$$

$$k^4 \cot \delta_\ell(k) = r_\ell^{(0)} + O(k) \quad (\ell \geq 2). \quad (14)$$

v_p は p 波散乱体積 (scattering volume) と呼ばれます⁶。式 (9) と若干異なる部分もありますが、いずれにせよ $k \rightarrow 0$ で式 (11) が成立します。これは短距離型のポテンシャルならば、どのようなポテンシャルであっても一般的に成立します。次節で式 (11) から得られる 2 体問題束縛・共鳴状態等の性質を議論しますが、これは原子核でも原子でも物質中の素励起でも、どのような系でも一般的に広く成立します。その意味でユニバーサルな結果です。もっと言うと、たとえ系が一見異なっても散乱長・有効レンジの値が同じであれば、式 (11) が同じになり、観測される現象も全く同じになります。そのような意味で**量子 2 体問題は散乱長と有効レンジによってユニバーサルに記述できます**。非常に低エネルギーで式 (11) がさらに

$$f_0(k) = \frac{1}{-1/a - ik} \quad (15)$$

と近似できる場合、**量子 2 体問題は散乱長によってユニバーサルに記述できます**。

⁵ $1/r^n$ 型相互作用の 2 体問題については、 $n = 1, 2, 3, 4, 6$ については解析がすべて知られています。これらは、Coulomb 相互作用、Efimov 型相互作用、Dipole-Dipole 相互作用 [19]、荷電粒子-中性原子間相互作用 [20, 21]、Van der Waals 相互作用のベキにそれぞれ対応していて、原子分子物理的に大事なベキ型相互作用はおおよそが解析解が発見されています。しかし、 $n = 5$ の場合の解析解は未発見です。

⁶ ここで、 $\ell \geq 2$ で $\delta_\ell(k) \propto k^4$ になる理由は、Born 近似を用いると $f(k) = \sum_r V(r) e^{ikr} \propto k^3$ となることと $f_\ell(k) \propto \delta_\ell(k)/k$ などから理解できます。

「低エネルギー」の条件 一般に、ポテンシャルの到達距離 b と比べて $k \ll b^{-1}$ が成立すれば式 (11) が成立します。中性原子の場合、原子間の van der Waals 相互作用 $-C_6/r^6$ の特徴的な到達距離 $r_{\text{vdw}} = \frac{1}{2}(mC_6)^{1/4}$ が b を与えます。通常用いられる原子たちでは $b \sim r_{\text{vdw}} = 1-10\text{nm}$ であり、これはエネルギースケールに直すと $1/mr_{\text{vdw}}^2 = 100\mu\text{K}$ 程度です。常温の原子はこの条件を満たしませんが、冷却原子気体の実験は $T \lesssim 1\mu\text{K}$ で行われるため、式 (11) が非常に良く成立します。一方、原子核やハドロン系の場合には、低エネルギー条件 $k \ll b^{-1}$ は一般には成立しません。しかし、後で紹介する重陽子や一部の中性子過剰核などでは近似的に良く成立する場合があります。

本当に S 波だけでいいの？ もし p 波散乱体積 p 波散乱体積が偶然、もしくは何かしらの理由で非常に大きくなっている場合、それが散乱振幅に重要な寄与をする場合があります。ゼロエネルギー付近に p 波の状態が存在する場合や、冷却原子の p 波 Feshbach 共鳴の実験 [24] は、まさにそのような場合に該当し、 v_p や $f_\ell(k)$ をちゃんと考える必要があります。特に同じスピン状態にいるフェルミ粒子は、対称性から $f_0(k)$ が効かないので、 p 波散乱を考える必要がある場合があります。またエネルギーがある程度しか小さくない場合 $E \lesssim 1/mb^2$ に、 $\delta_\ell \propto k^{2\ell+1}$ が subleading な効果として効いてくる場合もあります。

2.2 束縛状態、バーチャル状態、共鳴状態

散乱振幅の発散を与える k は式 (11) より

$$k = \begin{cases} k_{a,\pm} = \pm \sqrt{\frac{2}{ar_{\text{eff}}} - \frac{1}{r_{\text{eff}}^2} + \frac{i}{r_{\text{eff}}}} & (r_{\text{eff}}/a \geq \frac{1}{2}) \\ k_{b,\pm} = \frac{i}{r_{\text{eff}}} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2r_{\text{eff}}}{a}} \right] & (r_{\text{eff}}/a \leq \frac{1}{2}) \end{cases} \quad (16)$$

となり、これらの解の位置によって、以下のように 2 体状態は分類されます⁷。

- 正の虚軸上 $k = i\kappa$: 束縛状態 $E = k^2/2\mu_{12} = -\kappa^2/2\mu_{12}$, $\psi(r) \propto e^{-\kappa r}/r$ として実在している。
- 負の虚軸上 $k = -i\kappa$: バーチャル状態。遠方で well-behaved という条件を満たさないため実在しない。
- 第四象限 $\text{Re}[k] > 0, \text{Im}[k] < 0$ かつ $\text{Re}[k] > \text{Im}[k]$: 共鳴状態 (resonant state)。 $E = E_0 + i\Gamma$ ($E_0 > 0, \Gamma > 0$) の有限寿命・有限エネルギー幅を持った準安定状態として実在。

$|r_{\text{eff}}/a| \ll 1$ の場合 式 (16) の第 2 行目に相当。特に「-」の方 $k_{b,-}$ だけに注目すると：

- $a > 0$: 束縛状態が存在し、 $k = i/a$ 。すなわち

$$E = -\frac{1}{2\mu_{12}a^2} \quad (17)$$

- $a < 0$: 束縛状態なし。バーチャル状態 $k = i/a$ のみ存在

となり、 $1/a = 0$ が 2 体問題の挙動を変える「臨界点」になっています。実はこの臨界点がユニタリー極限 $\delta_0 = \pi/2$ になっています。式 (15) を用いても同じ結果が得られます。

⁷この節での以下の議論は、やや advanced な話も含み、また以降での Efimov 状態の物理を解説する際にも必要としないので、初学者はこの 2.2 説を読み飛ばしても結構です。

$r_{\text{eff}} > 0$ の場合 図 1 のようにエネルギー Spektral や極 k の位置は振る舞います：

- $a < 0$: 束縛状態 $k_{b,+}$ が 1 つ (図 1 の橙丸)。バーチャル状態 $k_{b,-}$ が 1 つ (図 1 の青丸) 存在。
- $0 < 1/a < 1/2r_{\text{eff}}$: 束縛状態が 2 つ $k_{b,\pm}$ 存在。特に $k_{b,-}$ (図 1 の青丸・実線) が $1/a = 0$ 付近で式 (17) と振舞う。
- $1/a > 1/2r_{\text{eff}}$: 複素 k 平面上で束縛状態 2 つの極が衝突した結果、第 1・2 象限に $k_{a,\pm}$ が出現。有限寿命を持つ状態になる。

散乱長を変えていくと、 $a > 0$ の領域で束縛状態が突然寿命を持ち始めるようになるように一見みえます。この unphysical な現象は、 $k \sim r_{\text{eff}}^{-1} \sim b^{-1}$ であり⁸、有効レンジ展開での条件「 $k \ll b^{-1}$ 」を満たしていないのに式 (11) を使ったことによる artefact です。よって、図 1 は $r_{\text{eff}}/|a| \ll 1$ でのみ正しいと解釈すべきです。

$r_{\text{eff}} < 0$ の場合⁹ 図 2 のようにエネルギー Spektral や極 k の位置は振る舞います：

- $1/a < -1/|r_{\text{eff}}|$: 第三象限と第四象限に 1 つずつ $k_{a,\pm}$ が存在。第四象限にある $k_{a,+}$ (図 2 の青丸) は $E = E_0 + i\Gamma$ ($E_0 > 0, \Gamma > 0$) のような共鳴状態で有限寿命を持つ (図 2 右図の青領域)。第三象限にある $k_{a,-}$ (図 2 の橙丸) はその複素共役な状態。
- $-1/|r_{\text{eff}}| < 1/a < -1/2|r_{\text{eff}}|$: 第四象限の $k_{a,+}$ (図 2 の青丸) は $E = E_0 + i\Gamma$ ($E_0 < 0, \Gamma > 0$) の負のエネルギーで有限寿命を持つ状態。 $k_{a,-}$ はその複素共役に相当する状態。
- $-1/2|r_{\text{eff}}| < 1/a < 0$: 束縛状態なし。バーチャル状態が 2 つ存在。
- $1/a > 0$: 束縛状態 $k_{b,-}$ (図 2 の青丸) が 1 つとバーチャル状態 $k_{b,+}$ (図 2 の橙丸) が存在

これらの一見不思議な現象な変化は $k \sim |r_{\text{eff}}|^{-1}$ のあたりで起こります。もし $|r_{\text{eff}}| \sim b$ であれば、やはり低エネルギー条件 $k \ll b^{-1}$ を満たさないため unphysical な現象といえます。しかし次節で述べるように r_{eff} は負に発散的に大きくなることがあります。そのような場合、低エネルギー条件 $k \ll b^{-1}$ を満たしながら上記の現象が実際に起こりうるのです。

2.3 散乱長と有効レンジの物理的意味と性質

$k \rightarrow 0$ で $f_0(k) = -a$ 、 $\sigma = 4\pi a^2$ なので、散乱長は散乱の強さや大きさを表す指標です。それと同時に、波動関数の形状を表す量でもあります。実際、式 (6) より $k \rightarrow 0$ のときに

$$r\psi(r) \propto \begin{cases} \text{複雑な挙動} & (r \ll b) \\ \left(1 - \frac{r}{a}\right) & (b \ll r \ll k^{-1}) \end{cases} \quad (19)$$

⁸これは波動関数のノルムが正であることより導ける Wigner Bound と呼ばれる不等式 [25, 26]

$$r_{\text{eff}} \leq 2r - \frac{2r^2}{a} + \frac{2r^3}{3a^2} \quad (18)$$

からみてとれます (r は $r \geq b$ を満たす任意の正数)。

⁹後述のように $r_{\text{eff}} < 0$ になることもある。特に冷却原子では r_{eff} は原子種やその内部状態によって、正負の様々な値をとります。

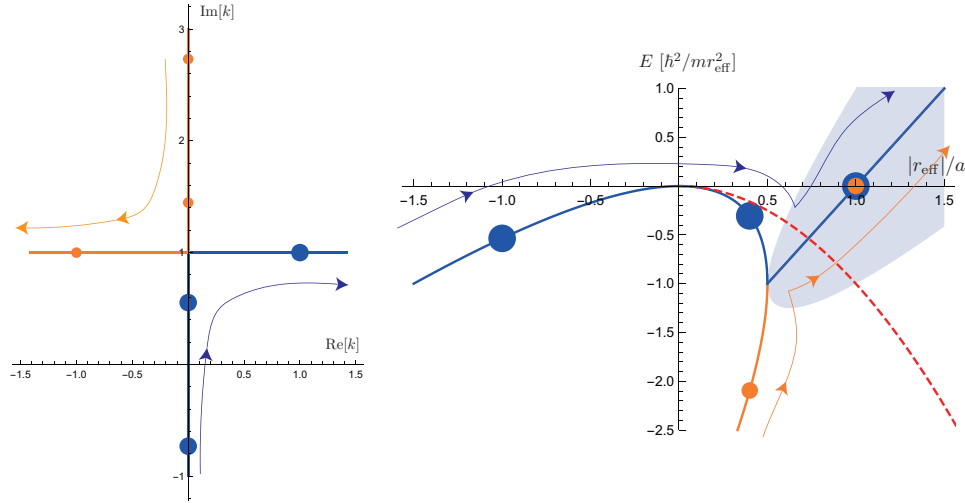


図 1: $r_{\text{eff}} > 0$ での複素 k 平面での極の位置 (左) とエネルギー (右)。細い手書き矢印線で、 $1/a$ を負から正に増やしていった際の動きを示している。 $|r_{\text{eff}}|/a = -1.0, 0.4, 1.0$ の極とエネルギーを青丸および橙丸で示す。薄青領域は状態の寿命を示している。橙色点線は普遍的な束縛エネルギー表式式 (17)。

になります。このことより、散乱長は波動関数の「傾き」と「ゼロ点の位置」を特徴づける量だとも言えます。さらに、式 (12) より $ka \sim -\delta_0(k)$ なので $V(r)$ による位相シフトの大きさを特徴づける量でもあります。このように、散乱長にはいくつかの理解の仕方がありますが、それぞれ完全に等価なものになっています。

通常、散乱断面積は $V(r)$ の到達距離程度なので、散乱長の大きさは相互作用の到達距離程度 $|a| \sim b$ です。しかし、束縛状態が現れるところで $|a| \gg b$ と非常に大きくなります。実際、引力ポテンシャルを深くしていった際に散乱長が負に大きくなっていき、 $a = -\infty$ から正の散乱長 $a = \infty$ に $1/a = 0$ をまたいで変化することで、波動関数の節がちょうど 1 つ増えます。「 $E = 0$ での波動関数の節の数は、束縛状態の数と一致する」という Levinson の定理があるので [18]、この散乱長の発散と束縛状態の出現は一対一に対応しています。

これらのことをより理解する具体例として、図 3 に引力型箱型ポテンシャルで、解析的に得られる散乱長と有効レンジ

$$a = R \left(1 - \frac{\tan \gamma}{\gamma} \right), \quad r_{\text{eff}} = R \left[1 + \frac{3 \tan \gamma - \gamma(3 + \gamma^2)}{3\gamma(\gamma - \tan \gamma)^2} \right] \quad (\gamma = R \sqrt{m|V_0|}) \quad (20)$$

を示します。束縛状態が現れる $\gamma = \pi(n + 1/2)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) ところで、散乱長が $a \rightarrow \pm\infty$ と発散します。 $\gamma = \pi/2$ 近くの振舞を詳細にみてみましょう。 γ を徐々に増やすと a が負に大きくなる。そして束縛状態が現れ、 $\gamma = \pi/2$ で散乱長が発散する $1/a = 0$ 。そして束縛状態がある $\gamma > \pi/2$ で散乱長が正の大きな値から小さくなっていく。すなわち $1/a$ は、負の値から 0 になり、そして正の値に変化していきます。これは前節の $a < 0$ で束縛状態が無く、 $a > 0$ で式 (17) のような束縛状態が現れることともコンシステントです。そして図 3 に示す通り、式 (17) や式 (16) で得られる束縛エネルギーは、箱型ポテンシャルの厳密解と束縛エネルギーが小さい領域でのみ良く一致します。すなわち、前節で得られた 2 体問題のユニバーサルな性質は、低エネルギーで散乱長が大きな領域で成立するものなのです。

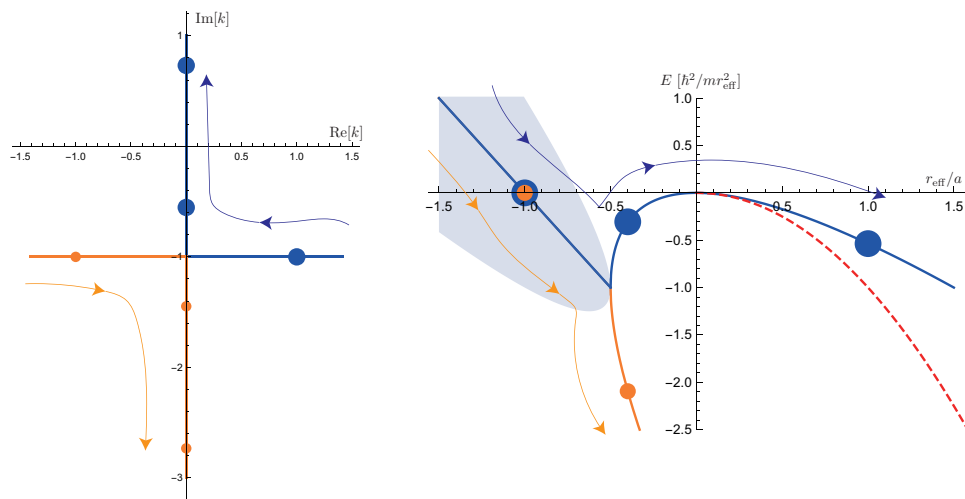


図 2: $r_{\text{eff}} < 0$ での複素 k 平面での極の位置 (左) とエネルギー (右)。 $|r_{\text{eff}}|/a = -1.0, -0.4, 1.0$ の極とエネルギーを青丸および橙丸で示す。

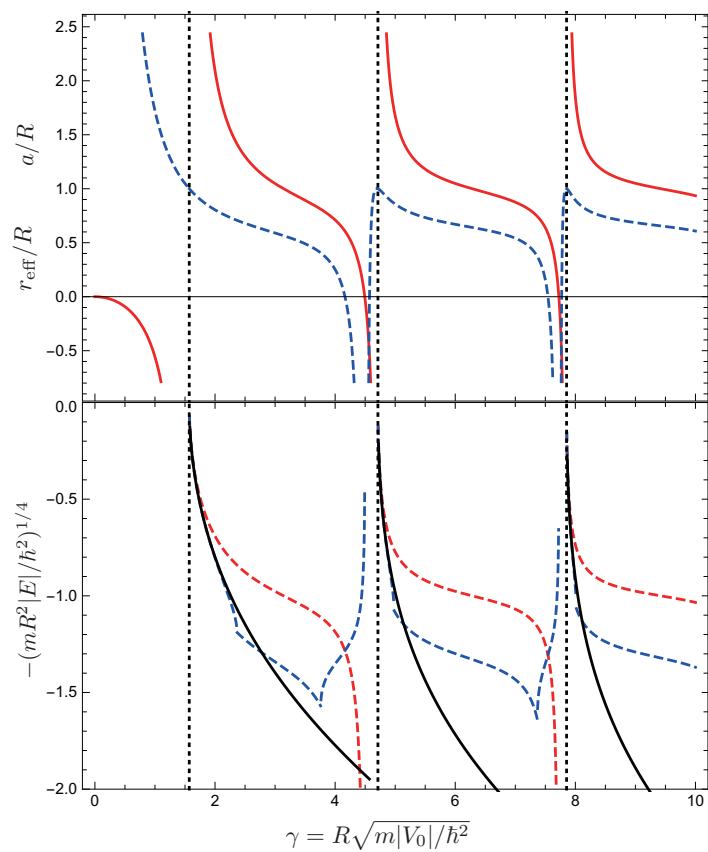


図 3: 上パネル：引力箱型ポテンシャルの散乱長 (赤実線) と有効レンジ (青破線)。下パネル：束縛状態のエネルギー (黒実線)。低エネルギーにおけるユニバーサルな式 (17)[赤破線] と式 (16)[青破線] と束縛エネルギーが小さい領域で良く一致している。束縛状態のエネルギーがゼロになる $\gamma = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2$ (黒垂直点線) で散乱長が発散する。

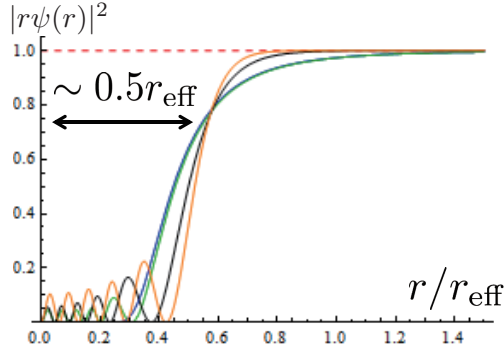


図 4: $1/a = 0$ における、短距離型ポテンシャルに対するゼロエネルギー波動関数 $\chi_0(r) = r\psi(r)|_{E=0}$ (実線) と、漸近波動関数 $1 - r/a = 1$ (赤破線) の比較。横軸は様々な異なるポテンシャルに対して、それぞれの r_{eff} をスケールに取った。Lenard-Jones ポテンシャル (青)、ソフトコア Van der Waals ポテンシャル $-C/(r^6 + \sigma^6)$ (緑)、Pöschl-Teller ポテンシャル $-C/\cosh^2(r/r_0)$ (黒)、ガウスポテンシャル $-Ce^{-r^2/r_G^2}$ (橙)。

一方、有効レンジは $\gamma = \pi(n + 1/2)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 近傍では $r_{\text{eff}} = R$ で、ポテンシャルの幅と同じ値です。これは以下の Smordinskii 公式 (教科書 [18] などを参照) から理解できます：

$$\frac{r_{\text{eff}}}{2} = \int_0^\infty dr \left[\left(1 - \frac{r}{a}\right)^2 - \chi_0^2(r) \right] \quad (21)$$

$\chi_0(r)$ はゼロエネルギーでの波動関数 $r\psi(r)$ を $r \gg b$ で $1 - \frac{r}{a}$ に漸近するように規格化したものです。これより r_{eff} は、ポテンシャルによって式 (19) の一行目のように波動関数が複雑な挙動をする長さスケール、すなわちポテンシャルのレンジをおおよそ与えることになります： $r_{\text{eff}} \sim b$ 。図 4 に、いくつかの短距離型ポテンシャルのゼロエネルギー波動関数 $\chi_0(r) = r\psi(r)|_{E=0}$ と漸近波動関数の比較をします。実際に、これらのポテンシャルに対して r_{eff} がポテンシャルの到達距離 (i.e. 波動関数が漸近系からずれる長さスケール) を与えることが見て取れます。

ただし、必ずしもそうなるわけでもありません。図 5 のようなデルタ関数障壁付きのポテンシャルを考えると、散乱長と有効レンジは [27]

$$a = R - \frac{1}{g + \kappa_0 \cot(\kappa_0 R)} \quad (22)$$

$$r_{\text{eff}} = R - \frac{g(1 + gR)}{\kappa_0^2} \quad (23)$$

のようになります。障壁の高さ g を大きくしていくと、有効レンジが負で非常に多くなり、ポテンシャルの到達距離よりもはるかに大きくなり得ます¹⁰。しかし、この講義録ではこのような場合は考えず、 $r_{\text{eff}} \sim R$ の場合のみを主に扱います。

量子少数系のユニバーサリティの本質的な起源 多体系の相転移・臨界現象と比較すると面白いです。相転移・臨界現象では臨界点まわりで系の挙動が変化し、その臨界点まわりで相関長と呼

¹⁰ このような有効レンジが負で大きな値を持つケースが冷却原子でもあり、Narrow Feshbach 共鳴などと呼ばれています。ただしこれまで冷却原子の実験で良く用いられている Feshbach 共鳴は、比較的 r_{eff} がポテンシャルの到達距離と良く一致するいわゆる Broad Feshbach 共鳴であることが多く、Narrow Feshbach 共鳴近傍の少数系の物理については、現在研究が進んでいるところで、未解明なことも多いです。

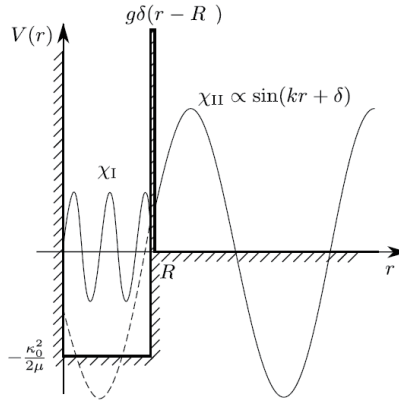


図 5: デルタ関数障壁付きのポテンシャル (モデルと図は [27] より引用)。

ばれる長さスケールが発散します。そのような発散的に大きな長さスケールが存在するために、系をくりこみ群の手法や低エネルギー有効理論などで粗視化でき、相転移・臨界現象のユニバーサリティが導けます。一方、少数系では2体束縛状態が現れる臨界点であるユニタリー極限付近で、散乱長 a が発散します。そのような発散的に大きな長さスケールが存在するため、同様に系を粗視化するくりこみ群の手法や低エネルギー有効理論が使え、少数系についてもユニバーサリティが導けます。これがこの講義の主題である「量子少数系のユニバーサリティ」がなぜ成立するかのエッセンスだと言えます。上記の箱型ポテンシャルの例で散乱長があまり大きくない領域 (束縛状態のエネルギーが大きな領域) でユニバーサルな結果と大きく離れたのも、相転移・臨界現象が臨界点 $T = T_c$ から離れるにつれてユニバーサリティの予言からずれていくことと類似しています。

散乱長が大きな系は非常に稀 しかし散乱長が非常に大きいという条件 ($|a| \gg b$) は、自然界ではめったに起きません。これは相互作用による位相シフト $\delta(k)$ が 0 から $\pi/2$ の間でランダムに選ばれていると思うと、散乱長が発散的に大きくなる $\pi/2$ 付近になるのが稀だということが理解できます。そのように稀有ないくつかの具体例を Sec. 2.6 や Sec. 5 で紹介します。

2.4 擬ポテンシャル (Pseudo potential) の方法

2.4.1 実空間での解析に適した方法

式 (19) より、もし興味のある物理現象が低エネルギー現象で、ポテンシャルの到達距離よりも遥かに空間スケールの大きな場合 (i.e. $k^{-1} \gg R, b, |r_{\text{eff}}|$)、式 (19) の短距離の複雑な振舞は完全に無視して、 $r \gtrsim R, b, |r_{\text{eff}}|$ での波動関数だけを見ればよいことになります。その場合、波動関数は $r > 0$ でポテンシャルの無い自由な方程式

$$-\frac{1}{2\mu_{12}} \nabla_r^2 \psi(r) = E\psi(r), \quad (24)$$

に従っていて、 $r = 0$ 付近で散乱長を再現するような位相シフトを受けている

$$r\psi(r) \rightarrow \text{Const} \left(1 - \frac{r}{a}\right) \quad (r \rightarrow 0) \quad (25)$$

という境界条件をつけたものを考えれば、2体問題の解を非常に良く再現してくれるだろう、と予想できます。このようなアプローチは**ゼロレンジ理論 (zero-range theory)**と呼ばれ、 $R, b, |r_{\text{eff}}|$ などがゼロと見なせるくらい、相対的に小さい場合に非常に良く成立します。これは

$$\frac{d}{dr} \log[r\psi(r)]_{r=0} = -\frac{1}{a} \quad (26)$$

とも書き換えられます。ここで対数微分を使ったのは式 (25) の係数部分を上手く $r = 0$ の波動関数だけで表現するためです。この境界条件は **Bethe-Peierls 境界条件**と呼ばれ、最も良く使われるゼロレンジ理論の1つである。

この Bethe-Peierls 境界条件の下で2体問題を解くことは、散乱振幅を式 (15) と見なすことと等価です。そのことを示しましょう。 $r > 0$ では自由場なので、漸近波動関数 $r\psi(r) = \sin(kr + \delta_0(k))$ が $r = 0$ の無限近傍まで厳密解になっています。そして $r = 0$ で Bethe-Peierls 境界条件を課すと

$$k \cot \delta_0(k) = -\frac{1}{a} \quad (27)$$

となります。これを式 (5) に代入すると式 (15) が求まります。上式から分かる通り、この Bethe-Peierls 境界条件の方法は $r_{\text{eff}} = 0$ と近似することに相当しています。それがゼロレンジ近似と呼ばれる理由です¹¹。

上記の Bethe-Peierls 境界条件の方法は、ある意味 $r = 0$ でのみポテンシャルが存在して位相シフト $\delta_0 = -ka$ を与えている、と思えます。実際

$$V_{\text{HY}}(r) = \frac{2\pi a}{\mu_{12}} \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r} r \quad (29)$$

という **Huang-Yang の擬ポテンシャル (pseudo potential)** が存在しているのと等価になります。それを示しましょう： $r\psi(r) = \sin(kr + \delta_0(k))$ に対して

$$\nabla_r^2 \psi(r) = -k^2 \psi(r) - 4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \sin \delta_0(k) \quad (30)$$

であり、

$$V_{\text{HY}}(r)\psi(r) = \frac{2\pi a}{\mu_{12}} \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r} \sin(kr + \delta_0(k)) = \frac{2\pi a}{\mu_{12}} \delta^{(3)}(\mathbf{r}) k \cos \delta_0(k) \quad (31)$$

であることから、有効レンジ展開式 (27) を使うと

$$\left[-\frac{1}{2\mu_{12}} \nabla_r^2 + V_{\text{HY}}(r) \right] \psi(r) = \frac{k^2}{2\mu_{12}} \psi(r), \quad (32)$$

を満たし、2つの方法が等価なことが分かります。Huang-Yang の擬ポテンシャルの微分項は一見非常にわかりにくいのですが、上記の計算をみれば単純なデルタ関数を考えると $r = 0$ 付近で $V(r)\psi(r) \sim \delta^{(3)}(\mathbf{r})/r = \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \times \infty$ という特異性が出てきてしまうことが分かります。つまり、この微分演算子があることで、発散がおこらないように上手に regulate されているのです。

¹¹ Bethe-Peierls 境界条件を

$$\frac{d}{dr} \log[r\psi(r)]_{r=0} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_{\text{eff}} k^2 \quad (28)$$

とエネルギー依存型境界条件にすることで、Bethe-Peierls の方法を有効レンジの効果を含むように拡張する試みもありますが、こちらは本講義では割愛します。詳細は [28] などを参照。

2.4.2 運動量空間での解析に適した方法

運動量空間で2体、3体 Schrödinger 方程式を解きたい場合、Bethe-Peierls 境界条件や Huang-Yang の擬ポテンシャルの方法よりも、以下の分離型ポテンシャル [29] を用いる方が便利です。

$$\hat{V}_{\text{sep}} = g|\phi\rangle\langle\phi| \quad (33)$$

通常良く見るポテンシャル $V(\mathbf{r}) = \langle\mathbf{r}|V|\mathbf{r}'\rangle = \langle\mathbf{r}|V|\mathbf{r}\rangle$ が空間について diagonal なのに対して、

$$\langle\mathbf{r}|\hat{V}_{\text{sep}}|\mathbf{r}'\rangle = g\langle\mathbf{r}|\phi\rangle\langle\phi|\mathbf{r}'\rangle = g\phi(\mathbf{r})\phi^*(\mathbf{r}') \quad (34)$$

と non-diagonal な形をしています。そのため、少し不思議なポテンシャルではあるのですが、運動量空間での表現が

$$\langle\mathbf{k}|\hat{V}_{\text{sep}}|\mathbf{k}'\rangle = g\langle\mathbf{k}|\phi\rangle\langle\phi|\mathbf{k}'\rangle = g\phi(\mathbf{k})\phi^*(\mathbf{k}') \quad (35)$$

と形式的に簡単にできるため、以下に示す通り、2体問題が形式的に非常に簡単に解けてしまうという長所があります。そのことを以下で見いきましょう。Schrödinger 方程式

$$\left[-\frac{1}{2\mu_{12}} \nabla_{\mathbf{r}}^2 + g|\phi\rangle\langle\phi| \right] |\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad (36)$$

に対して左から $\langle\mathbf{p}|$ を作用させると

$$\langle\mathbf{p}|\psi\rangle = \psi(\mathbf{p}) = \frac{g\langle\phi|\psi\rangle}{E - p^2/2\mu_{12} + i0} \phi(\mathbf{p}) \quad (37)$$

となります。いま散乱問題を考えているので $\mathbf{k}$ を in-coming momentum ($E = k^2/2\mu_{12}$) として

$$\psi(\mathbf{p}) = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) + \psi_{\text{sc}}(\mathbf{p}) \quad (38)$$

と入射波と散乱波に分けて波動関数が書けます。これと式 (37) により

$$\psi_{\text{sc}}(\mathbf{p}) = \frac{g\phi(\mathbf{p})}{E - p^2/2\mu_{12} + i0} [\phi^*(\mathbf{k}) + \langle\phi|\psi_{\text{sc}}\rangle] \quad (39)$$

となります。右辺にこの ψ_{sc} を逐次代入することを繰り返すと

$$\psi_{\text{sc}}(\mathbf{p}) = \frac{T(\mathbf{k}, \mathbf{p})}{k^2 - p^2 + i0} \quad (40)$$

が得られます。ここで

$$\begin{aligned} T(\mathbf{k}, \mathbf{p}) &= 2\mu_{12}g\phi^*(\mathbf{k})\phi(\mathbf{p}) \left[1 + \sum_{\mathbf{q}} \frac{g|\phi(\mathbf{q})|^2}{E - q^2/2\mu_{12} + i0} + \dots \right] \\ &= \frac{2\mu_{12}g\phi^*(\mathbf{k})\phi(\mathbf{p})}{1 - \sum_{\mathbf{q}} \frac{g|\phi(\mathbf{q})|^2}{E - q^2/2\mu_{12} + i0}} \\ &= \frac{\phi^*(\mathbf{k})\phi(\mathbf{p})}{\frac{1}{2\mu_{12}g} - \sum_{\mathbf{q}} \frac{|\phi(\mathbf{q})|^2}{k^2 - q^2 + i0}} \end{aligned} \quad (41)$$

は2体 T 行列と呼ばれます。散乱振幅と T 行列は直接関係づけられます¹²：

$$f(k) = -\frac{1}{4\pi} T(\mathbf{k}, \mathbf{p})|_{|\mathbf{k}|=|\mathbf{p}|} \quad (42)$$

¹² これは式 (40) を複素積分を用いながら Fourier 変換し、式 (3) と比較することで導けます。

低エネルギー極限での散乱振幅式 (15) と比較すると、

$$\frac{1}{4\pi a} = |\phi(0)|^{-2} \left[\frac{1}{2\mu_{12}g} + \sum_{\mathbf{q}} \frac{|\phi(\mathbf{q})|^2}{q^2} \right] \quad (43)$$

という、散乱長と g を関係づける式が求まります。これは繰り込み関係式と呼ばれたりもします。というのは、 g という bare 相互作用と、物理的な相互作用 a を結び付けていて、相互作用を繰り込んでいる式だからです。最も単純な

$$\phi(\mathbf{k}) = \begin{cases} 1 & (|\mathbf{k}| < \Lambda) \\ 0 & (|\mathbf{k}| > \Lambda) \end{cases} \quad (44)$$

というステップ関数型の分離型ポテンシャルを考えると、

$$\frac{1}{2\pi a} = \left[\frac{1}{\mu_{12}g} + \frac{\Lambda}{\pi^2} \right] \quad (45)$$

で $\Lambda \rightarrow \infty$ で $g \rightarrow 0$ になっていて、 Λ に対して $g(\Lambda)$ が繰り込まれていくことが見て取れます¹³。このステップ関数型分離型ポテンシャルは、 $\Lambda \rightarrow \infty$ 極限で、Bethe-Peierls 境界条件や Huang-Yang の擬ポテンシャルの方法と等価になります。それを示しましょう。 T 行列は式 (41) より

$$\begin{aligned} T^{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) &= \frac{1}{4\pi a} - \sum_{|\mathbf{q}| < \Lambda} \left[\frac{1}{q^2} + \frac{1}{k^2 - q^2 + i0} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi a} - \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\Lambda q^2 dq \left[\frac{1}{q^2} + \frac{\mathcal{P}}{k^2 - q^2} - i\pi\delta(k^2 - q^2) \right] \\ &\rightarrow \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{a} + ik \right] \end{aligned} \quad (46)$$

となります。ここで $\mathcal{P}$ は主値積分で、最後の行では第二項に対して

$$\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\Lambda q^2 dq \left[\frac{1}{q^2} + \frac{\mathcal{P}}{k^2 - q^2} \right] = \frac{k^2}{2\pi^2} \int_0^\Lambda dq \frac{\mathcal{P}}{k^2 - q^2} = \frac{k}{2\pi^2} \operatorname{arctanh} \frac{k}{\Lambda} \rightarrow 0 \quad (47)$$

を用いました。これより、式 (42) を用いると散乱振幅は式 (19) となり、Bethe-Peierls 境界条件や Huang-Yang の擬ポテンシャルの方法と等価なことが示されました。これは、この分離型ポテンシャルが

$$\phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (|\mathbf{r}| \gg \Lambda^{-1})$$

$$\phi(\mathbf{r}) \sim \phi(0) \quad (|\mathbf{r}| \lesssim \Lambda^{-1})$$

より、 $\Lambda \rightarrow \infty$ 極限で

$$\langle \mathbf{r} | \hat{V}_{\text{sep}} | \mathbf{r}' \rangle = g\phi(\mathbf{r})\phi^*(\mathbf{r}') \rightarrow \tilde{g}\delta^{(3)}(\mathbf{r})\delta^{(3)}(\mathbf{r}') = \tilde{g}\delta^{(3)}(\mathbf{r})\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\tilde{g} = g|\phi(0)|^2) \quad (48)$$

となり、デルタ関数相互作用を実空間で考えていることと等価だということからも理解できます。

¹³式 (45) を Λ で微分すれば繰り込み群方程式が得られ、 $\Lambda = -\frac{\pi^2}{\mu_{12}g}$ という Fixed point とそのまわりの Flow が得られます。

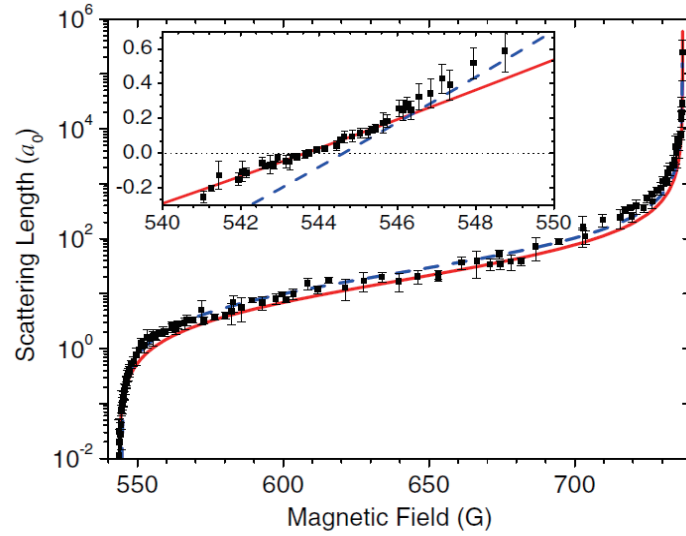


図 6: ^7Li 原子での Feshbach 共鳴の観測 [35]。 $a_0 = 0.52... \times 10^{-10}$ m は原子単位。赤線と青線は、それぞれ結合チャンネル方による Feshbach 共鳴の理論計算と式 (49)。Inset は散乱長のゼロ点付近の挙動 $a \approx 0$ 。 $B_0 = 737$ G。図は [35] より引用。

2.5 冷却原子における Feshbach 共鳴による散乱長の制御¹⁴

冷却原子気体の長所は、様々なパラメータが人工的に自在に制御できてしまうことです。特に原子間相互作用を Feshbach 共鳴 [30] という技術により自在に変化させることができます。図 6 に Feshbach 共鳴の観測例を示します¹⁵。原子間の s 波散乱長が、外部磁場を変えることで変化していることが見て取れます。特に、共鳴磁場と呼ばれる B_0 付近で散乱長は

$$a(B) \propto \left(1 - \frac{\Delta B}{B - B_0}\right), \quad (49)$$

のように振舞い、発散的に大きくなります。この技術を使って、散乱長を制御しながら少数系や多体系の研究を理論と比較しながら行うことができます。特に散乱長が発散的に大きくなる系での少数系・多体系のユニバーサルな挙動を調べることができ、Efimov 状態の研究や、ユニタリーフェルミ気体を用いた中性子核物質の状態方程式の研究 [32, 33, 34] などが行われています。

Feshbach 共鳴の物理的な起源はチャンネル結合散乱にあります。詳細は解説記事 [36] やレビュー論文 [37] などに詳しくあります。ここでは簡単にエッセンスのみを紹介します：原子には多数の内部状態があり、異なるチャンネルの束縛状態がちょうど入射エネルギーと一致した際に、散乱長が発散的に増大します。 ΔB が非常に大きな、いわゆる Broad Feshbach 共鳴と呼ばれる場合には、この束縛状態のチャンネルの自由度は無視でき、前節で紹介したゼロレンジ理論や擬ポテンシャルの方法が使えます。従って Feshbach 共鳴近傍の散乱現象の挙動は前節で紹介した通りになります。一方、 ΔB が比較的小さな、いわゆる Narrow Feshbach 共鳴の場合には、束縛状態の自

¹⁴ドイツ人ではなく、アメリカ人で「フェッシュバック」と正しくは発音します。が、「フェッシュバックハ」と発音されることが国内・海外ともに多いです。また、類似の Fano 共鳴と呼ばれる現象を原子分子物理学の分野で発見した Fano と併せて、「Fano-Feshbach 共鳴」と呼ばれたりもします。

¹⁵ ^7Li 原子については、より最新の研究で散乱長と磁場の関係が update されており [31]、これは少し古い観測データです。

由度もしっかり取り込む必要があります、結合チャンネルを陽に含むような相互作用モデル [38, 39] が必要になってきます。この講義録では前者の場合をゼロレンジ理論や擬ポテンシャルの方法を使って解説します。後者の場合の Efimov 状態の物理は、まだ完全には解明されておらず、重要なテーマの 1 つになっています [40, 41]。

Note: 「冷却原子の Feshbach 共鳴」は本来の「Feshbach 共鳴」と少し違い、「共鳴」ではない。

Feshbach 「共鳴」と呼ばれるので、「おや？共鳴状態がどこかに出てくるのかな？」と思うかもしれませんが、違います。冷却原子の分野では、ある磁場周りで散乱長や散乱断面積が非常に大きくなる現象を（やや短絡的に）「共鳴」と呼んでしまっており、特に実験的に重要な Broad Feshbach 共鳴 ($r_{\text{eff}} > 0$) の場合には共鳴状態は現れません (図 1 参照)。しかし、散乱理論における「共鳴」とは $\text{Re}[E] > 0$ で寿命の長い状態 (複素 k 平面の正の虚軸上に S 行列の極に相当) が現れることであり、本来 Feshbach が発見した現象ではこの意味での「共鳴状態」がちゃんと出現します。その意味において、「冷却原子の Feshbach 共鳴は本来 Feshbach 共鳴とは少し違う。結合チャンネル Hamiltonian の系のパラメータを連続的に変化させた際に、束縛状態がバーチャル状態に変化していき、その際に散乱長が非常に大きくなる現象であり、共鳴状態が本質ではない。」、と言うこともできると思います。

2.6 物理系への適用例

重陽子 陽子・中性子間相互作用は古くは湯川秀樹による研究などから様々な研究がされ、かなりのことが分かっています。遠方では π 中間子を交換することによる引力相互作用

$$V(r) \rightarrow -\frac{e^{-\kappa_\pi r}}{r} \quad (50)$$

をしており、その到達距離は π 中間子の質量 140 MeV から $\kappa_\pi^{-1} \sim 1-2 \text{ fm}$ と見積もれます。一方、近距離ではクォーク間が重なることによる排他律などから強い斥力が現れます。この遠距離・近距離の挙動を再現するモデルポテンシャルとして、CD Bonn[42], Reid 93[43], AV18[44] などと呼ばれるいくつかのモデルポテンシャルがあります。これらは、どれも格子 QCD 計算により得られた核子間ポテンシャル [45, 46] とともに定性的に同じような形状をしています。

中性子・陽子間の s 波散乱長は観測データなどから、スピンの平行なトリプレット状態の場合は $a_t = 5.4112(15) \text{ fm}$, スピンの反平行なシングレット状態の場合は $a_s = -23.7148(43) \text{ fm}$ と見積もられています [47]。これらは上記の核力の到達距離の 5-20 倍程度とだいぶ大きいので、比較的ユニバーサルに振舞うのでは、と期待されます。実際に、この散乱長の値を式 (17) に代入すると、全スピン角運動量 $S = 1$ の重陽子の束縛エネルギーは 1.416 MeV になります。これは実際に分かっている重陽子の束縛エネルギーは 2.224 MeV とオーダーとしては合っていますが、値はだいぶずれています。このことは、中性子・陽子間の散乱長がものすごく大きいわけではないがゆえに、有効レンジ等の効果が無視できないからです。有効レンジの効果を取り込んだ式 (16) を用いて、中性子・陽子間の有効レンジ $r_{\text{eff},t} = 1.7436(19) \text{ fm}$ [47] を代入すると、重陽子の束縛エネルギーは 2.223 MeV となり、実際の値とほぼ完全に一致します。これらの結果から、低エネルギーでの中性子・陽子散乱では、ゼロレンジ近似で定性的には良い。有効レンジの効果を取り込めば定量的に中性子・陽子散乱を記述できる、ということになります。また $a_s < 0$ であるため、 $S = 0$

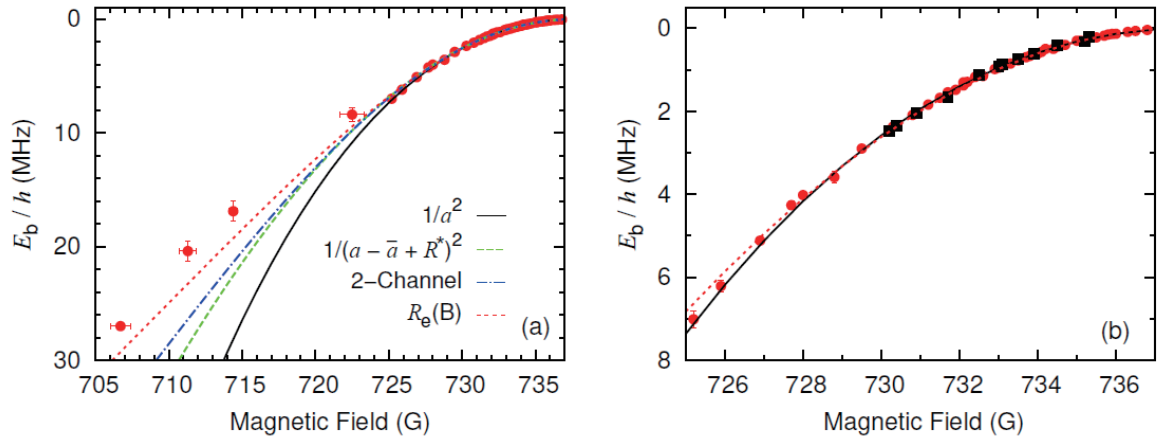


図 7: ${}^7\text{Li}$ 原子での Feshbach 共鳴近傍の束縛エネルギー ([31] より引用)。振動磁場を外場として与えた時の原子ロス (modulation spectroscopy) により測定。赤点と青点は、それぞれ低温 (BEC 状態) と高温 (熱原子 $\sim 3 \mu\text{K}$) での観測データ。式 (17) による理論 (黒線)、それを有効レンジ補正を入れた表式 (緑破線)、結合チャンネル計算 (青点破線)、式 (16) による理論に有効レンジの磁場依存性を取り込んだもの (赤点線) も示す。

の重陽子状態や中性子 2 つの束縛状態は存在しません。これらの結果は Sec. 5 で三重水素の計算を行うときにも使います。

${}^4\text{He}$ 原子 ${}^4\text{He}$ 原子には 2 体束縛状態が 1 つ存在し、その束縛エネルギーは物質は回折による実験で 1.1(2) mK [48]、最近の Coulomb explosion と呼ばれる手法で 1.76(15) mK [49] と測定されています。一方、 ${}^4\text{He}$ 原子間のポテンシャルとして良く知られている LM2M2 ポテンシャルによる 2 体問題の計算によると、束縛エネルギーは 1.308 mK であり、比較的良く一致しています。散乱長は $a = 100.01 \text{ \AA}$ であり、相互作用レンジの 10-20 倍の非常に大きな散乱長を持ちます¹⁶。この散乱長と式 (17) を用いて束縛エネルギーを計算すると 1.21 mK になり、精密な計算結果と非常に良く合います。従って、 ${}^4\text{He}$ 原子の系はゼロレンジ近似が非常に良く成立する系だと期待できます。

Feshbach 共鳴近傍の冷却原子 Feshbach 共鳴で散乱長を非常に大きくした系では、式 (17) や式 (16) が非常に良く成立します。図 7 に束縛状態の束縛エネルギーの観測例を示します。式 (17) (黒線) が散乱長が大きく束縛エネルギーが小さい領域で非常に良く成立している様子が見てとれます。また共鳴点からだいぶ外れた際にも、有効レンジ補正を取り入れた式 (16) (赤点線) が非常に良く束縛エネルギーを再現する様子が見て取れます。

¹⁶最近 QED 補正まで取り入れたポテンシャルも提案されており [50]、それによると束縛エネルギーは $1.62 \pm 0.03 \text{ mK}$ になります。これは LM2M2 ポテンシャルや TTY ポテンシャル [51] よりも、Coulomb explosion の実験と良く一致します。

3 3体問題の理論的手法

この節では、3体問題の理論的な扱い、解き方を紹介します。一般のポテンシャルに対して量子3体問題を解くには、数値的手法が不可欠ですが、ゼロレンジ近似の下ではほとんど解析的に3体問題が解けてしまいます。実空間の方法、運動量空間の方法を両方解説します。簡単のため、内部自由度(スピン、アイソスピン)が全くない同種3粒子ボース粒子系の3体問題を考えます(異種粒子混合系の3体問題については、Sec. 4で解説します)。

3.1 実空間の方法：Hyper-spherical 座標の方法

一般理論 まず一般的な相互作用のある Schrödinger 方程式を考えます

$$\left[-\frac{1}{2m}(\nabla_{r_1}^2 + \nabla_{r_2}^2 + \nabla_{r_3}^2) + U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \right] \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = E\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3), \quad (51)$$

3体問題を扱うには、以下の Jacobi 座標 $(\mathbf{r}_{ij}, \boldsymbol{\rho}_k)$ が便利です：

$$\mathbf{R}_{\text{tot}} = \frac{1}{3}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3), \quad (52)$$

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad (53)$$

$$\boldsymbol{\rho}_3 = \mathbf{r}_3 - \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2). \quad (54)$$

実際、Jacobi 座標を使うと、運動項は

$$-\sum_{i=1}^3 \frac{\nabla_i^2}{2m} = -\frac{\nabla_{\mathbf{R}_{\text{tot}}}^2}{6m} - \frac{\nabla_{\mathbf{r}_{12}}^2}{m} - \frac{3\nabla_{\boldsymbol{\rho}_3}^2}{4m}. \quad (55)$$

とそれぞれの term にきれいにわかれます。Jacobi 座標 $(\mathbf{r}_{ij}, \boldsymbol{\rho}_k)$ は、2体問題での「相対座標」を3粒子系に拡張したもので、 $\mathbf{r}_{ij}$ は i, j 粒子間の相対座標、 $\boldsymbol{\rho}_k$ は i, j 粒子の重心と k 粒子の間の相対座標です。この証明は帰納法を使えば簡単で、2体問題のときに

$$-\frac{1}{2m_1}\nabla_{\mathbf{r}_1}^2 - \frac{1}{2m_2}\nabla_{\mathbf{r}_2}^2 = -\frac{1}{2M_{12}}\nabla_{\mathbf{R}_{\text{tot},12}}^2 - \frac{1}{2\mu_{12}}\nabla_{\mathbf{r}_{12}}^2 \quad (56)$$

と1・2粒子の重心座標 $\mathbf{R}_{\text{tot},12}$ と相対座標 $\mathbf{r}_{12}$ と重心質量 $M_{12} = m_1 + m_2$ と換算質量 $\mu_{12} = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ を使って表されることを思い出すと

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \frac{\nabla_i^2}{2m} &= \frac{1}{2\mu_{12}}\nabla_{\mathbf{r}_{12}}^2 + \frac{1}{2M_{12}}\nabla_{\mathbf{R}_{\text{tot},12}}^2 + \frac{1}{2m}\nabla_{\mathbf{r}_3}^2 \\ &= \frac{1}{2\mu_{12}}\nabla_{\mathbf{r}_{12}}^2 + \frac{1}{2\mu_{12,3}}\nabla_{\boldsymbol{\rho}_3}^2 + \frac{1}{2M_{\text{tot},12,3}}\nabla_{\mathbf{R}_{\text{tot}}}^2 \end{aligned} \quad (57)$$

ここで、2行では $(\mathbf{R}_{\text{tot},12}, \mathbf{r}_3)$ とその質量 (M_{12}, m) に対して式(56)を適用しました。 $M_{\text{tot},12,3} = 3m$, $M_{12} = 2m$, $\mu_{12,3} = M_{12}m/(M_{12} + m) = 2m/3$ を代入すると、式(55)が示せます。

Jacobi 座標を使って、もっと便利な超球面座標 (Hyper-spherical coordinate) を導入できます⁴:

$$R^2 \equiv \frac{2}{3} [r_{12}^2 + r_{23}^2 + r_{31}^2] = r_{12}^2 + \frac{4}{3}\rho_3^2, \quad (58)$$

$$\alpha_3 = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}r_{12}}{2\rho_3}\right) \quad \left(0 \leq \alpha_3 \leq \frac{\pi}{2}\right). \quad (59)$$

ここで R は超半径 (hyper-radius)、 α_k は超角度 (hyper-angle) と呼ばれます¹⁷

Jacobi 座標は、hyper-radius と hyper-angle を使うと、

$$r_{12} = R \sin \alpha_3, \quad (60)$$

$$\rho_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} R \cos \alpha_3. \quad (61)$$

と逆に表せます。hyper-radius R は 3 粒子系の全体的なサイズを特徴づける量で、特に R が小さい時には 3 粒子がすべて接近します。一方、hyper-angle α_3 の方は、3 粒子の相対的な位置や形状を表します。図 8(a) に示す通り、 $\alpha_3 \rightarrow +0$ のときに 1・2 粒子が接近して 3 体系が「細長い 2 等辺三角形」の形状になります。そして、 $\alpha_3 \rightarrow \pi/2$ だと 1・2 粒子の重心位置に 3 粒子目がいって 3 体系が「直線状」の形状になります (図 8(c))。そして $\alpha_3 = \pi/4$ には 3 体系が「正三角形」の形状になります (図 8(b))。

相対運動部分の方程式

$$-\frac{1}{m} \left[\frac{1}{r_{12}} \frac{d^2}{dr_{12}^2} r_{12} - \frac{\hat{L}_{r_{12}}^2}{r_{12}^2} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\rho_3} \frac{d^2}{d\rho_3^2} \rho_3 - \frac{\hat{L}_{\rho_3}^2}{\rho_3^2} \right) + mU(\mathbf{r}_{12}, \boldsymbol{\rho}_3) \right] \Psi(\mathbf{r}_{12}, \boldsymbol{\rho}_3) = E\Psi(\mathbf{r}_{12}, \boldsymbol{\rho}_3), \quad (62)$$

は、hyper-radius と hyper-angle を使い、微分の chain-rule などを用いると、以下のように書けます。

$$H\Psi(R, \alpha_3, \hat{\mathbf{r}}_{12}, \hat{\boldsymbol{\rho}}_3) = E\Psi(R, \alpha_3, \hat{\mathbf{r}}_{12}, \hat{\boldsymbol{\rho}}_3) \quad (63)$$

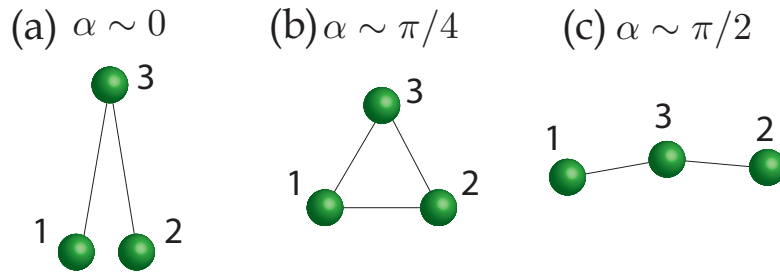


図 8: (a) 小さい hyper-angle、(b) $\alpha = \pi/4$ 、(c) 大きな hyper-angle における、3 体系の形状。

⁴Hyper-radius にはいくつかの異なる定義の流儀があるので要注意。ここでは Efimov や Skorniakov–Ter-Martirosian の原論文などに沿った定義をしますが [52, 53, 54]、最近では $R \equiv \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 + r_{31}^2}{\sqrt{3}}}$ という定義や [55, 56, 57]、 $R \equiv \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 + r_{31}^2}{3}}$ という定義をする論文 [12, 58, 59, 60] が多い。それぞれ、この講義録の定義とは $\frac{3^{1/4}}{\sqrt{2}} = 0.931\dots$ 倍と $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707\dots$ 倍異なる。より一般的には、 $R \equiv \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 + r_{31}^2}{3\tilde{m}}}$ と任意の無次元数 $\tilde{m}$ を導入して定義できます [13, 61]。
¹⁷これらの超半径・超角度という日本語での呼び方はかなりマイナーで、hyper-radius, hyper-angle という呼び方が主流なので、本講義録では hyper-radius, hyper-angle と呼びます。

$$\begin{aligned}
H &= -\frac{1}{m} \left[\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{5}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_3^2} + \frac{4}{R^2} \cot 2\alpha_3 \frac{\partial}{\partial \alpha_3} - \frac{1}{R^2} \left(\frac{\hat{L}_{\rho_3}^2}{\cos^2 \alpha_3} + \frac{\hat{L}_{r_{12}}^2}{\sin^2 \alpha_3} \right) + mU(R, \alpha_3, \hat{r}_{12}, \hat{\rho}_3) \right] \\
&= -\frac{1}{m} \left[\frac{1}{R^{5/2}} \frac{\partial^2}{\partial R^2} R^{5/2} - \frac{15}{4R^2} + \frac{1}{R^2} \frac{1}{\sin 2\alpha_3} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha_3^2} + 4 \right) \sin 2\alpha_3 - \frac{1}{R^2} \left(\frac{\hat{L}_{\rho_3}^2}{\cos^2 \alpha_3} + \frac{\hat{L}_{r_{12}}^2}{\sin^2 \alpha_3} \right) + mU(R, \alpha_3, \hat{r}_{12}, \hat{\rho}_3) \right]
\end{aligned} \tag{64}$$

ここで $\hat{L}_{r_{12}}$ と $\hat{L}_{\rho_3}$ は r_{12} と ρ_3 座標の回転を記述する角運動量演算子です。

自由粒子 最も簡単な自由粒子 $U = 0$ の場合を考えると、hyper-radius と hyper-angle は変数分離でき、

$$\Psi(r_{12}, \rho_3) = \frac{1}{R^{5/2}} f_n(R) \Phi_n(\alpha_3, \hat{r}_{12}, \hat{\rho}_3), \tag{65}$$

$$\frac{1}{m} \left[-\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\lambda_n + \frac{15}{4}}{R^2} \right] f_n(R) = E f_n(R). \tag{66}$$

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial \alpha_3^2} - 4 \cot 2\alpha_3 \frac{\partial}{\partial \alpha_3} + \left(\frac{\hat{L}_{\rho_3}^2}{\cos^2 \alpha_3} + \frac{\hat{L}_{r_{12}}^2}{\sin^2 \alpha_3} \right) \right] \Phi_n(\alpha_3, \hat{r}_{12}, \hat{\rho}_3) = \lambda_n \Phi_n(\alpha_3, \hat{r}_{12}, \hat{\rho}_3) \tag{67}$$

となります。この分離された hyper-radius と hyper-angle の方程式は、2 体問題での相対座標と回転座標の変数分離した方程式に相当します。ここで、 λ_n は超角度固有値 (hyper-angular eigenvalue) と呼ばれる量での回転運動の固有値 $\ell(\ell+1)$ に相当し、 n は 2 体系で言う回転運動の量子数 (ℓ, m) に相当します。ここで 2 体問題と 3 体問題の主な違いとして、(i) α_3 という 3 体系の変形 (形状) を記述する座標があり、(ii) 回転の角運動量演算子が 2 つあり、相対運動の全角運動量 J は $\hat{L}_{r_{12}}$ と $\hat{L}_{\rho_3}$ の角運動量の合成からなる、ということがあります。

Adiabatic hyper-spherical 展開 粒子間に相互作用が働く場合、一般には hyper-radius と hyper-angle は変数分離できません。このことは、2 体相互作用として短距離型のハードコアポテンシャルを考え、どのような hyper-angle, hyper-radius 領域で波動関数がゼロになるべきかを示した図 9

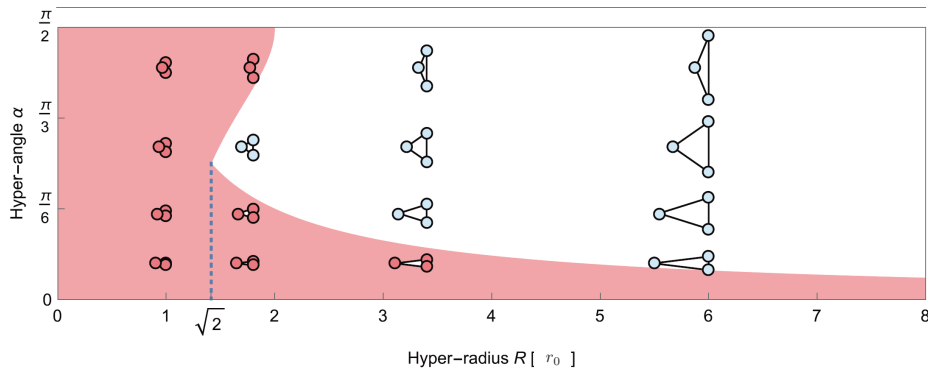


図 9: ハードコア 2 体力 $V(r_{ij}) = \infty$ ($r_{ij} < r_0$) が存在する時に、3 粒子系でハードコアポテンシャルがかかり波動関数がゼロになるべき領域を赤で示す。ただし $\hat{r}_{12}$ と $\hat{\rho}_3$ は 90 度の角度を成すとして固定。[15] より引用。

からも容易にみてとれます。そのような場合であっても、hyper-angle の方程式

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial \alpha_3^2} - 4 \cot 2\alpha_3 \frac{\partial}{\partial \alpha_3} + \left(\frac{\hat{L}_{\rho_3}^2}{\cos^2 \alpha_3} + \frac{\hat{L}_{r_{12}}^2}{\sin^2 \alpha_3} \right) + mR^2 U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \right] \Phi_n(R, \alpha_3, \hat{\mathbf{r}}_{12}, \hat{\rho}_3) = \lambda_n(R) \Phi_n(R, \alpha_3, \hat{\mathbf{r}}_{12}, \hat{\rho}_3), \quad (68)$$

の固有関数 Φ_n を完全系の基底にとって、波動関数を

$$\Psi(\mathbf{r}_{12}, \rho_3) = \frac{1}{R^{5/2}} \sum_n f_n(R) \Phi_n(R, \alpha_3, \hat{\mathbf{r}}_{12}, \hat{\rho}_3), \quad (69)$$

のように展開することで、式 (65) から式 (67) の自由場の変数分離できた方程式と類似系の方程式が得られます:

$$\frac{1}{m} \left[-\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\lambda_n(R) + \frac{15}{4}}{R^2} \right] f_n(R) + \sum_m \left[Q_{nm}(R) + 2P_{nm}(R) \frac{\partial}{\partial R} \right] f_m(R) = E f_n(R). \quad (70)$$

式 (69) の展開は断熱超球面展開 (adiabatic hyper-spherical expansion)、式 (68) は断熱超角度方程式 (adiabatic hyper-angular equation) などと呼ばれます [62]。Hyper-radius 部分の方程式 (70) に出てくる

$$Q_{nm}(R) = -\frac{1}{m} \left\langle \Phi_n \left| \frac{\partial^2}{\partial R^2} \right| \Phi_m \right\rangle, \quad (71)$$

$$P_{nm}(R) = -\frac{1}{m} \left\langle \Phi_n \left| \frac{\partial}{\partial R} \right| \Phi_m \right\rangle. \quad (72)$$

は非断熱項 (non-adiabatic term) や非断熱結合 (non-adiabatic couplings) などと呼ばれます。ここでブラケットは、hyper-angle 座標系における積分

$$\langle \Phi_n | \hat{A} | \Phi_m \rangle = \int \sin^2 \alpha_3 \cos^2 \alpha_3 d\alpha_3 d\Omega_{\hat{\mathbf{r}}_{12}} d\Omega_{\hat{\rho}_3} \Phi_n^*(R, \alpha_3, \hat{\mathbf{r}}_{12}, \hat{\rho}_3) \hat{A} \Phi_m(R, \alpha_3, \hat{\mathbf{r}}_{12}, \hat{\rho}_3). \quad (73)$$

を意味しており、hype-radius と hyper-angle 部分の波動関数はそれぞれ以下のように規格化されているものとします。

$$\int_0^\infty dR |f_n(R)|^2 = 1, \quad (74)$$

$$\langle \Phi_n | \Phi_n \rangle = \int \sin^2 \alpha_3 \cos^2 \alpha_3 d\alpha_3 d\Omega_{\hat{\mathbf{r}}_{12}} d\Omega_{\hat{\rho}_3} |\Phi_n(R, \alpha_3, \hat{\mathbf{r}}_{12}, \hat{\rho}_3)|^2 = 1. \quad (75)$$

2 体力・3 体力が一般に存在する場合は、上記の数多くの n のチャンネルが結合した方程式を数値的に解くことで3体問題は解けます。そのような計算も実際に行われていますが [56, 57]、 $Q_{nm}(R)$ を取り入れた結合チャンネルの Schrödinger 方程式を解くことになり、非常に次元の大きな問題を解くことになります。

Faddeev 分解 ポテンシャルが2体力のみからなる $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = V(\mathbf{r}_{12}) + V(\mathbf{r}_{23}) + V(\mathbf{r}_{31})$ の場合、3つの粒子が対称的に相互作用することを利用して、問題をより単純化できると期待できます。それは Faddeev 分解の方法と呼ばれ [63]

$$\Phi_n(R, \alpha_3, \hat{\mathbf{r}}_{12}, \hat{\rho}_3) = \chi_n(R, \alpha_1, \hat{\mathbf{r}}_{23}, \hat{\rho}_1) + \chi_n(R, \alpha_2, \hat{\mathbf{r}}_{31}, \hat{\rho}_2) + \chi_n(R, \alpha_3, \hat{\mathbf{r}}_{12}, \hat{\rho}_3). \quad (76)$$

と hyper-angle 部分の波動関数を分解します。これまで議論していた $\Omega_3 = (\alpha_3, \hat{\mathbf{r}}_{12}, \hat{\mathbf{p}}_3)$ と異なる取り方の Jacobi 座標・Hyper-angle 系 $\Omega_2 = (\alpha_2, \hat{\mathbf{r}}_{31}, \hat{\mathbf{p}}_2)$, $\Omega_1 = (\alpha_1, \hat{\mathbf{r}}_{23}, \hat{\mathbf{p}}_1)$ による波動関数を導入することで

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial \alpha_i^2} - 4 \cot 2\alpha_i \frac{\partial}{\partial \alpha_i} + \left(\frac{\hat{L}_{\rho_i}^2}{\cos^2 \alpha_i} + \frac{\hat{L}_{r_{jk}}^2}{\sin^2 \alpha_i} \right) \right] \chi_n(R, \Omega_i) + mR^2 V(R \sin \alpha_i) [\chi_n(R, \Omega_1) + \chi_n(R, \Omega_2) + \chi_n(R, \Omega_3)] = \lambda_n(R) \chi_n(R, \Omega_i). \quad (77)$$

となり、 $U = V(\mathbf{r}_{12}) + V(\mathbf{r}_{23}) + V(\mathbf{r}_{31})$ の 3 つの相互作用項を、それぞれの Faddeev 要素 χ_n に与えることで方程式を単純化させられます¹⁸。

擬ポテンシャルでの解 2 体相互作用を Bethe-Peierls 境界条件式 (26) で取り込んだ際の 3 体問題を解きます。最も単純な $\hat{L}_{\rho_3} = \hat{L}_{r_{12}} = 0$ をまず考えましょう。相互作用は $R \sin \alpha_i \neq 0$ では $V = 0$ となり、その条件での hyper-angle 方程式は

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial \alpha_3^2} - 4 \cot 2\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] \chi_n(R, \alpha) = \left[-\frac{1}{\sin 2\alpha} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 4 \right) \sin 2\alpha \right] \chi_n(R, \alpha) = \lambda_n(R) \chi_n(R, \alpha). \quad (78)$$

となります。式 (77) は $i = 1, 2, 3$ 全てで同じなので $\alpha_i = \alpha$ と表記しました。この解は

$$\lambda_n(R) = s_n^2(R) - 4 \quad (79)$$

として、波動関数 χ_n が $\alpha = \pi/2$ で発散しないことに留意すると

$$\chi_n(R, \alpha) = c \frac{\sin \left[s_n(R) \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right]}{\sin 2\alpha} \quad (80)$$

で与えられます。Bethe-Peierls 境界条件を $r_{12} = 0$ 、すなわち $\alpha_3 = 0$ で適用すると ($\alpha_3 \approx \sin \alpha_3$ を用いる)

$$\frac{d}{d\alpha_3} [\alpha_3 (\chi_n(R, \alpha_1) + \chi_n(R, \alpha_2) + \chi_n(R, \alpha_3))]_{\alpha_3=0} = -\frac{R}{a} [\alpha_3 (\chi_n(R, \alpha_1) + \chi_n(R, \alpha_2) + \chi_n(R, \alpha_3))]_{\alpha_3=0} \quad (81)$$

となります。そして、 $\alpha_3 = 0$ のときに、他の Jacobi・Hyper-angle 座標系で $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{3}$ であることより、次の方程式が得られます [52, 12]。

$$\frac{8}{\sqrt{3}} \sin \left[s_n(R) \frac{\pi}{6} \right] - s_n(R) \cos \left[s_n(R) \frac{\pi}{2} \right] = -\frac{R}{a} \sin \left[s_n(R) \frac{\pi}{2} \right]. \quad (82)$$

$R/a = 0$ のユニタリ極限の場合、この方程式は

$$\frac{8}{\sqrt{3}} \sin \left[s_n(R) \frac{\pi}{6} \right] - s_n(R) \cos \left[s_n(R) \frac{\pi}{2} \right] = 0 \quad (83)$$

¹⁸今回は Adiabatic hyper-spherical expansion を行ったあとの hyper-angular 波動関数を Faddeev 分解した。この方法は非断熱項の微分が生じる項が $P_{nm}(R) = 0$ となり、また対角項も $Q_{nm}(R) \geq 0$ と必ず正になることが保障されるという利点があります。一方、まず Faddeev 分解を行い、Faddeev 要素を adiabatic hyper-spherical expansion する方法もあり [12]、その場合にはこのようなきれいな性質は成り立たない。

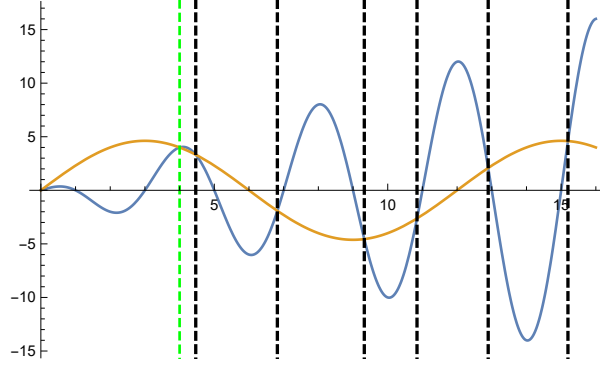


図 10: 式 (83) の実数解。橙線は $\frac{8}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{x\pi}{6}\right)$ 、青線は $x \cos\left(\frac{x\pi}{2}\right)$ 。黒点線は実数解 $s_1 = 4.47, s_2 = 6.82, s_3 = 9.32, s_4 = 10.84, s_5 = 15.20$ 。緑点線で示した解 $s_{spu} = 4$ は非物理的な解 (脚注参照)。

となり、 R に全く依存しない。従って、 s_n, χ_n, Φ_n はすべて R によらない。これはユニタリー極限では長さスケールを持つ量が消えて、スケール不変になるためです。そのため非断熱結合 Q_{nm}, P_{nm} は厳密にゼロになり、hyper-radial 方程式は

$$\frac{1}{m} \left[-\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{s_n^2 - \frac{1}{4}}{R^2} \right] f_n(R) = E f_n(R). \quad (84)$$

となります。この式より、 $s_n^2 > 1/4$ の場合は斥力的な相互作用が hyper-radius の方程式に現れて、 $s_n^2 < 1/4$ の場合に引力的な相互作用が現れることになります。実は次にみるように $s_n^2 = 0$ を境に解の挙動ががらっと変化します。言い換えると、 s_n が実数か虚数かで波動関数の振舞いが大きく変化します。

では実際に、どのような s_n が式 (83) の解として存在するのを見ていきましょう。式 (83) を調べると、図 10 と図 11 に示す通り、たくさんの実数解 $s_1 = \pm 4.47, s_2 = \pm 6.82, \dots$ に加えて¹⁹、1 つ純虚数解 $s_0 = \pm i 1.00624 \dots$ が存在します。実数解が現れるチャンネル $n = 1, 2, \dots$ では斥力が hyper-radius に現れるので、束縛状態などは現れません。一方、純虚数のチャンネル $n = 0$ では以下に見るように束縛状態が可算無限発生し、それらの間に離散スケール普遍性が成立します。すなわち Efimov 状態がこの $n = 0$ チャンネルの引力により発生するのです。

Thomas 崩壊と 3 体パラメータ 式 (84) の純虚数 s_0 に対する解析解は、 $E = -\kappa^2/m$ として

$$f_0(R) = \sqrt{R} K_{i|s_0|}(\kappa R) \quad (85)$$

と、第二種変形ベッセル関数 K で与えられます。この関数は $R = 0$ 付近で無限に高速に振動します。実際、漸近形

$$K_{i|s_0|}(z \rightarrow 0) = \sin \left[|s_0| \ln\left(\frac{z}{2}\right) - \frac{1}{2} \arg\left(\frac{\Gamma(i|s_0| + 1)}{\Gamma(-i|s_0| + 1)}\right) \right] \quad (86)$$

¹⁹最も小さい実解 $s = 4$ は非物理的な解で spurious solution と呼ばれます。実際この解を式 (80) に代入し、式 (76) より波動関数を求めるとゼロになってしまう。Faddeev 分解をするこのような非物理的な spurious solution が生じてしまうのが気を付ける点です。

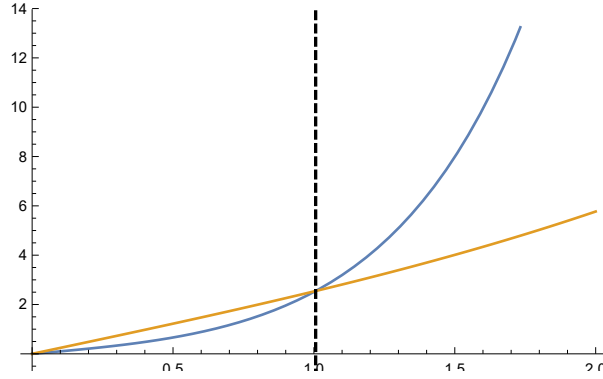


図 11: 式 (83) の虚数解。橙線は $\frac{8}{\sqrt{3}} \sinh\left(\frac{\pi x}{6}\right)$ 、青線は $x \cosh\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ 。点線は虚数解 $s_0 = i1.00624$

を用いると、hyper-radial 関数は

$$f_0(R) = c_1 R^{\frac{1}{2} + i|s_0|} + c_2 R^{\frac{1}{2} - i|s_0|} \quad (R \ll \kappa^{-1}) \quad (87)$$

という out-going term と in-coming term の和の形になっていることが見て取れます。波動関数が無限にたくさん振動するということは、「あるエネルギー E_0 での波動関数の節の数は、 $E < E_0$ の束縛状態の数と等しい」という Levinson の定理を用いると、無限にたくさんの束縛状態があるということになります。また上記の議論は任意の $E < 0$ に対して成立するので「無限に束縛エネルギーの大きな状態が無限に存在する」という一見意味不明な結果が出てきます。この病的な結果は Thomas 崩壊 (Thomas collapse) と呼ばれています [64]。1935 年に Thomas によって発見されたという意味で、非常に古くから知られていた結果なのですが、その物理的な理解を初めて正確に得たのが Efimov です²⁰。この $R = 0$ 付近での病的な結果は、ゼロレンジ理論を使った結果生じたものです。しかし実際の物理系では相互作用のレンジ b は小さいですが有限です。もし $R \lesssim b$ ならば上記のゼロレンジ理論は破綻するはずで、相互作用ポテンシャルのによる複雑な散乱が生じます。従って、上記のゼロレンジ理論による計算は $R \gg b$ でのみ正しいのです。 $R \lesssim b$ における複雑な散乱の状況を、2 体の時に Bethe-Peierls 境界条件と似たように

$$\left. \frac{d}{dR} \log[R^{-\frac{1}{2}} f_0(R)] \right|_{R=R_0} = \Lambda \quad (88)$$

として $R_0 \gtrsim b$ なパラメータを用いて取り込めます。この R_0 と Λ は 3 体パラメータ (three-body parameter) と呼ばれ、短距離での 3 粒子系の位相シフトを記述する量です。実際この境界条件を式 (87) に代入すると、

$$f_0(R) = \left(1 + \frac{R_0 \Lambda}{is}\right) \left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{1}{2} + i|s_0|} + \left(1 - \frac{R_0 \Lambda}{is}\right) \left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{1}{2} - i|s_0|} \quad (R \ll \kappa^{-1}) \quad (89)$$

²⁰Thomas の論文 [64] は 1935 年の論文としては驚くべきものです。中性子 2 つと陽子 1 つからなる 3 体問題を中性子間の相互作用をゼロと仮定した下で Thomas は考え、3 体系の束縛エネルギーと中性子・陽子の相互作用レンジとの間に成立する厳密な不等式を得ました。そして、中性子・陽子相互作用レンジがゼロの極限で基底状態のエネルギーが $-\infty$ となることを発見しました。また、観測されている三重水素核のエネルギーの値と計算を比較することで、「陽子・中性子間の相互作用のレンジが 10^{-15} m 程度以上である」ことや「中性子間の相互作用が非常に強く、無視してはいけない」ということを、なんと 1935 年の段階で指摘しているのです (c.f. 1932 年中性子の発見、1935 年 湯川 π 中間子理論)。

のように in-coming term と out-going term の係数、すなわち 3 体の phase shift を与えています。このスケール不変性は、変形ベッセル関数の対数での周期的振動式 (86) から来ています。

離散スケール不変性と量子アノマリー 式 (86) を用いると、以下のように可算無限個の束縛状態が現れることになります。

$$E_n = -\frac{\kappa_n^2}{m} = -\frac{2}{mR_0^2} \exp\left(-\frac{2n\pi}{|s_0|}\right) \exp\left(\frac{2}{|s_0|} \left[\text{Arccot}\left(\frac{\Lambda R_0}{|s_0|}\right) + \frac{1}{2} \arg\left(\frac{\Gamma(i|s_0|+1)}{\Gamma(-i|s_0|+1)}\right) \right]\right) \quad (n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots) \quad (90)$$

これより、次の Efimov 状態の離散スケール不変なエネルギースペクトルを得ます。

$$\frac{|E_n|}{|E_{n+1}|} = \exp\left(\frac{2\pi}{|s_0|}\right) = 515.03\dots \quad (91)$$

これを長さスケールに直すと $e^{\pi/|s_0|} = 22.694\dots$ になります²¹。

式 (90) では一見束縛エネルギーが大きな方 (n が負) へも、小さな方へ (n が正) も無限に状態が続いていくようにみえます。しかし式 (90) の導出で用いた $R \ll \kappa^{-1}$ という条件が束縛エネルギーが大きくなるにつれて破綻し、基底状態のエネルギーは

$$E_{\text{GS}} \equiv -\frac{\kappa_*^2}{m} \sim -\frac{2}{mb^2} \quad (92)$$

となります。この基底状態のエネルギーと 3 体パラメータ (R_0, Λ) の値は対応しているため、 κ_* を 3 体パラメータと呼ぶこともあります。一方、束縛エネルギーが小さい方は、束縛状態のサイズがどんどん大きくなっていきます。従って特に短距離部分による制約は受けず、原理的には可算無限個束縛状態は存在します²²。

この Efimov 状態の離散スケール不変性には、3 体パラメータの導入 (式 (88)) が本質的な役割を果たしています。Hyper-radial 方程式 (84) は、任意の正の実数 c に対して $R \rightarrow cR$ というスケール変換の下で不変です。そのように Schrödinger 方程式が連続スケール不変性をもつため、その解であるエネルギー固有状態も連続スケール不変性を持つ、と一見思えます。しかし、もしそれが本当だと、1 つ束縛状態 ($E, \psi_E(R)$) が見つかったら、任意の実数 c に対して ($c^{-2}E, \psi_{c^{-2}E}(cR)$) も固有状態になってしまい、「束縛状態なのに連続的なスペクトルを持つ」というおかしな事態になってしまいます。それを解消するのが 3 体パラメータの導入 (式 (88)) です。量子力学的な効果で 3 粒子間に引力が働いてしまい、基底状態が負に発散するという病的なことを回避する目的で 3 体パラメータを導入しましたが、実はこの境界条件を入れることにより、対称性が連続スケール対称性から離散スケール対称性に落ちているのです。このように、スケーリング対称性の破れが、量子力学的な効果由来で起きることを量子アノマリーと呼びます。Efimov 効果は、量子アノマリーの典型的な一例であると言われています。

有限散乱長の場合 この場合、式 (82) を数値的に解いた上で、hyper-radial 方程式を解かなくてはなりません。 $s_n(R)$ や hyper-angular 波動関数は R に陽に依存するため、非断熱チャンネル結

²¹ この値は $e^\pi = 23.14\dots$ に非常に近いですが、これは $s_0 = 1.00624$ が偶然 1 に近いためです。これは全くの偶然です。実際このスケールファクターは異種粒子混合系やフェルミ粒子系では、質量などに依存して変化し、全く異なる値になります (Sec. 4.1 参照)。

²² 通常の量子力学が破綻するといわれるプランクスケール $R_{\text{Pl}} = 10^{-35}$ m と、現在観測されている領域の宇宙のサイズ $R_{\text{univ}} = 10^{27}$ m を用いると、Efimov 状態は $\frac{|s_0|}{\pi} \log(R_{\text{univ}}/R_{\text{Pl}}) = 44.9\dots$ となり、40 個程度しか実現できない。

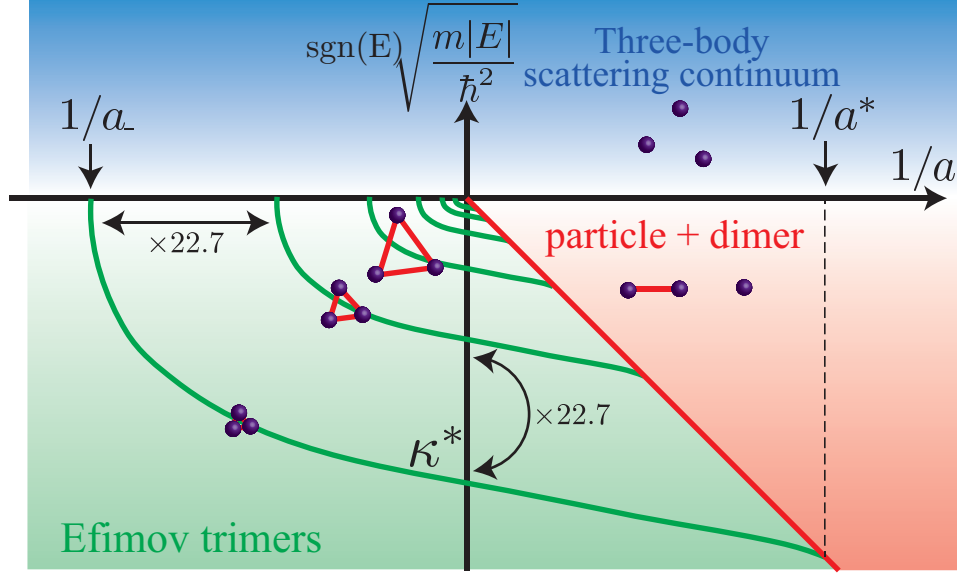


図 12: ゼロレンジ理論で得られる、Efimov 状態のエネルギースペクトル。3 粒子束縛状態 (Efimov 状態, 緑線) と式 (17) で与えられる 2 粒子束縛状態 (赤線) が描かれている。

合 $Q_{nm}(R)$ も存在するので、ちゃんとエネルギースペクトルを得るのはやや厄介です²³。しかし、式 (82) と式 (70) から次のことが言えます：もしある a でエネルギー $\kappa \propto \sqrt{|E|}$ の状態が存在したとしましょう。その解に対して $a \rightarrow e^{\pi/|s_0|}a$, $\kappa \rightarrow e^{-\pi/|s_0|}\kappa$, $R \rightarrow e^{\pi/|s_0|}R$ とした波動関数も同じ方程式を満たします。また、3 体パラメータの境界条件式 (88) についても $R \ll \kappa^{-1}$ で式 (89) が成立すると仮定すると、 $\Lambda \rightarrow e^{-\pi/|s_0|}\Lambda$, $R_0 \rightarrow e^{\pi/|s_0|}R_0$ と変換すれば不変です。このことより、「 $(a^{-1}, \text{sgn}(E)\kappa)$ 平面で 3 体束縛状態のエネルギースペクトルが $(a_n^{-1}, -\kappa_n)$ という点に存在したら、それを radial 方向に $e^{\pi/|s_0|}$ 倍スケールした $(a_{n+1}^{-1}, -\kappa_{n+1}) = (e^{\pi/|s_0|}a_n^{-1}, -e^{\pi/|s_0|}\kappa_n)$ にも存在する」、という動径スケリング則 (Radial scaling law) が成立します。このことは、とある n についてエネルギースペクトル E_n が散乱長 a の関数として求まったならば、そのエネルギースペクトルを $(a^{-1}, \text{sgn}(E)\kappa)$ 平面で $e^{\pi/|s_0|}$ 倍していけば、全ての Efimov 状態のエネルギースペクトルが得られる、ということを意味しています。そのため Efimov 状態のエネルギースペクトルは $(a^{-1}, \kappa) = (0, 0)$ のまわりに、自己相似的な形で分布します。その様子を図 12 に示します。

散乱長が $1/a = 0$ からだいぶ外れていた場合に Efimov 状態がどのようなことになるかについても図 12 に示されています。実は $1/a < 0$ という 2 粒子束縛状態が存在しない領域でも Efimov 状態は存在できます。そして、ある負の散乱長 $a = a_-$ において、3 つの粒子に分解します。この $1/a_- < 1/a < 0$ で 2 粒子は束縛しないが 3 粒子で束縛している状態を、3 つの輪が絡まりあっている結び目であるボロミアンリングになぞらえて、ボロミアン状態とも呼びます。 $a < 0$ の領域でボロミアン状態であることが、Efimov 状態の 2 つ目の特徴になります。このことは、式 (82) で $R \gg |a|$ の時を考えると定性的に理解できます。 $a < 0$ のときは $s_0(R) \rightarrow 2$ となり斥力的なポテンシャルが生じ

²³Efimov 状態が現れるチャンネルは引力、それ以外のチャンネルは斥力の hyper-radial ポテンシャルであるため、これらのチャンネル間の波動関数の重なり積分は小さいです。そのため、ゼロレンジ近似の場合には、 $Q_{nm}(R)$ や $P_{nm}(R)$ は小さくなります。しかし、有限レンジ効果 (Sec. 4.3 参照) が強く効く基底状態などについてはチャンネル結合が大きくなることもあります。

ます。そのため、 $1/a = 0$ から負の方向に $1/a$ が小さくなるにつれ、その斥力部分が相対的に増えて、最終的に 3 粒子がバラバラに分解してしまいます。

一方、 $a > 0$ ではボロミアン状態ではありません。そして散乱長を徐々に小さく ($1/a$ を大きく) していくと、Efimov 状態はある正の散乱長 $a = a^*$ で「dimer+partile 状態」へ分解します²⁴。実際、 $a > 0$ の際には、 $R/a \rightarrow +\infty$ で $s_0(R) = iR/a$ という純虚数解が存在でき、

$$\frac{s_n^2(R)}{mR^2} \rightarrow -\frac{1}{ma^2} \quad (93)$$

という 2 粒子束縛状態のエネルギー式 (17) に漸近します。これは、3 粒子束縛状態が $R \gg a$ で 2 体束縛状態+1 粒子に分解することを意味しています。

式 (82) を解析して得られる最終的な結果は以下のようになります²⁵

$$\frac{s_n^2(R)}{mR^2} = \begin{cases} -\frac{|s_0|^2}{mR^2} \left(1 + 1.897 \frac{R}{a}\right) & (R \ll a) \\ -\frac{1}{ma^2} \left(1 + \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}R} e^{-2\sqrt{2}\pi R/3a}\right) & (R \gg a) \end{cases} \quad (a > 0) \quad (94)$$

$$\frac{s_n^2(R)}{mR^2} = \begin{cases} -\frac{|s_0|^2}{mR^2} \left(1 - 1.897 \frac{R}{|a|}\right) & (R \ll |a|) \\ \frac{4}{mR^2} \left(1 - \frac{12}{\sqrt{2}\pi} \frac{|a|}{R}\right) & (R \gg |a|) \end{cases} \quad (a < 0). \quad (95)$$

これらの結果からも、図 12 のように定性的に振舞うだろうということがおおそ理解できます。この結果は、Sec. 4 で紹介する Born-Oppenheimer 近似を用いた解析でも同様の結果を導出できます。

この節で紹介した hyper-spherical expansion の方法は、物理的な描像が非常に明解な一方、定量的にエネルギースペクトルの形状を求めるのには不向きです。実際、ゼロレンジ理論ですらチャンネル結合した方程式 (70) を解かなくてはなりません。一方、次節で紹介する方法では、このチャンネル結合が自然に取り込まれて、数値的に図 12 のようなスペクトルを得るのが非常に容易だという利点があります。

3.2 運動量空間の方法：Skorniakov–Ter-Martirosian 方程式の方法

前節では実空間で 3 体問題を解きましたが、運動量空間でも解けます。最も有名な Skorniakov–Ter-Martirosian 方程式²⁶の方法をこの節では紹介します [54]。運動量空間の解析に適した分離型ポテンシャル式 (33) を用います。Jacobi 座標系で表した 3 体 Schrödinger 方程式

$$\left[-\frac{\nabla_{\mathbf{r}_{12}}^2}{m} - \frac{3\nabla_{\mathbf{p}_3}^2}{4m} + \sum_{i<j} g|\phi^{(ij)}\rangle\langle\phi^{(ij)}| \right] \Psi(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{p}_3) = E\Psi(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{p}_3) \quad (96)$$

²⁴負の散乱長での臨界値は「 a_- 」と呼ぶ一方、正の方は「 a^* 」と呼びます。これは歴史的な理由により「 a_+ 」を他のものを指すために用いるからです。(図 17 の左側のように $a > 0$ でロスレートを観測した際に周期的に現れるディップの位置を与える散乱長を a_+ と表記します。)

²⁵有限散乱長での $s_n(R)$ や $\frac{s_n^2(R)}{mR^2}$ の R/a 依存性は [12] の Figure 20 や Figure 21 を参照。

²⁶Skorniakov と Ter-Martirosian の 2 人が発見した方程式です。紛らわしいですが、Ter-Martirosian が 1 人の人物の名前です。

を考えます。ここで $|\phi^{(ij)}\rangle$ は ij 粒子間に分離型ポテンシャル ϕ が作用しているという意味です。これを運動量空間に Fourier 変換すると (i, j, k は cyclic 変数とする)

$$\left(p_3^2 + \frac{3}{4}P_3^2\right)\Psi(\mathbf{p}_3, \mathbf{P}_3) + mg \sum_{k=1,2,3} \phi(\mathbf{p}_k) \int \frac{d^3\mathbf{q}_k}{(2\pi)^3} \phi^*(\mathbf{q}_k) \Psi(\mathbf{q}_k, \mathbf{P}_k) = mE\Psi(\mathbf{p}_3, \mathbf{P}_3) \quad (97)$$

となります。ここで、 $(\mathbf{p}_3, \mathbf{P}_3)$ は $(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{p}_3)$ に共役な Jacobi 座標系での相対運動量運動量

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_3 &= \frac{1}{2}(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \\ \mathbf{P}_3 &= \frac{2}{3}\left(\mathbf{k}_3 - \frac{\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_1}{2}\right) \end{aligned} \quad (98)$$

で、 $(\mathbf{p}_1, \mathbf{P}_1)$ 、 $(\mathbf{p}_2, \mathbf{P}_2)$ も同様に定義されます。式 (97) を導出するには、式 (96) に左側から $\langle \mathbf{p}_3, \mathbf{P}_3 |$ を作用させて、 $\langle \mathbf{p}_3, \mathbf{P}_3 | \Psi \rangle = \Psi(\mathbf{p}_3, \mathbf{P}_3)$ や

$$\langle \mathbf{p}_3, \mathbf{P}_3 | \phi^{(ij)} \rangle = \sum_{\mathbf{q}'_k, \mathbf{Q}'_k} \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{P}_3 | \mathbf{q}'_k, \mathbf{Q}'_k \rangle \langle \mathbf{q}'_k, \mathbf{Q}'_k | \phi^{(ij)} \rangle = \sum_{\mathbf{q}'_k, \mathbf{Q}'_k} \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{P}_3 | \mathbf{q}'_k, \mathbf{Q}'_k \rangle \phi(\mathbf{q}'_k) \langle \mathbf{Q}'_k | = \phi(\mathbf{p}_k) \langle \mathbf{P}_k | \quad (99)$$

や

$$\langle \phi^{(ij)} | \Psi \rangle = \sum_{\mathbf{q}_k, \mathbf{Q}_k} \langle \phi^{(ij)} | \mathbf{q}_k, \mathbf{Q}_k \rangle \langle \mathbf{q}_k, \mathbf{Q}_k | \Psi \rangle = \sum_{\mathbf{q}_k, \mathbf{Q}_k} |\mathbf{Q}_k\rangle \phi^*(\mathbf{q}_k) \Psi(\mathbf{q}_k, \mathbf{Q}_k) \quad (100)$$

を使えば示せます。式 (97) は

$$F(\mathbf{P}) = mg \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \phi^*(\mathbf{q}) \Psi(\mathbf{q}, \mathbf{P}) \quad (101)$$

を導入すると、

$$\left(p_3^2 + \frac{3}{4}P_3^2 - mE\right)\Psi(\mathbf{p}_3, \mathbf{P}_3) + \sum_{k=1,2,3} \phi(\mathbf{p}_k) F(\mathbf{P}_k) = 0 \quad (102)$$

となり、この解は

$$\Psi(\mathbf{p}_3, \mathbf{P}_3) = \Psi^{(0)}(\mathbf{p}_3, \mathbf{P}_3) - \frac{\sum_k \phi(\mathbf{p}_k) F(\mathbf{P}_k)}{p_3^2 + \frac{3}{4}P_3^2 - mE + i0} \quad (103)$$

になります²⁷。この第一項 $\Psi^{(0)}$ は入射波を記述する項で、束縛状態を考える際には無視してよいので、今後は無視します。これを式 (101) に代入して整理すると

$$\left[\frac{1}{mg} + \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{|\phi(\mathbf{q})|^2}{q^2 + \frac{3}{4}P_3^2 - mE + i0} \right] F(\mathbf{P}_3) = - \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \phi^*(\mathbf{q}) \left[\frac{\phi(\mathbf{p}_1) F(\mathbf{P}_1)}{p_1^2 + \frac{3}{4}P_1^2 - mE + i0} + \frac{\phi(\mathbf{p}_2) F(\mathbf{P}_2)}{p_2^2 + \frac{3}{4}P_2^2 - mE + i0} \right] \quad (104)$$

右辺の 2 つの項は全く同じ寄与なので片方のみ考慮して $\times 2$ すればよい。左辺については式 (41) を用いると、運動量 $q_0 = \sqrt{mE - \frac{3}{4}P_3^2}$ における 2 体 T 行列を使って表せて、

$$\frac{|\phi(q_0)|^2}{T(q_0, q_0)} F(\mathbf{P}_3) = -2 \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{\phi^*(\mathbf{q}) \phi(\mathbf{p}_1)}{p_1^2 + \frac{3}{4}P_1^2 - mE + i0} F(\mathbf{P}_1) \quad (105)$$

となります。これを閉じた方程式にするためには、異なる Jacobi 座標系の運動量 $(\mathbf{q}, \mathbf{P}_3)$ 、 $(\mathbf{p}_1, \mathbf{P}_1)$ の間を関係づけないといけません。それは式 (98) などから²⁸

$$\mathbf{P}_1 = -\mathbf{q} - \frac{1}{2}\mathbf{P}_3 \quad (106)$$

²⁷ 第一項の起源については式 (39) や式 (40) などを参照。

²⁸ $\mathbf{q}$ は 1,2 粒子間の相対運動量で、 $\mathbf{p}_3$ に相当します (積分変数なので別記号を使っています)。

$$\mathbf{p}_1 = -\frac{1}{2}\mathbf{q} + \frac{3}{4}\mathbf{P}_3 \quad (107)$$

により与えられます。これより、 $\mathbf{P}_3$ 固定の下では、積分変数を $\mathbf{q}$ から $\mathbf{P}_1$ に変更できることが分かります。この新しい変数 $\mathbf{P}_1$ 、 $\mathbf{P}_3$ により

$$\mathbf{q} = -\frac{1}{2}\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1 \quad (108)$$

$$\mathbf{p}_1 = -\frac{1}{2}\mathbf{q} + \frac{3}{4}\mathbf{P}_3 = \frac{1}{2}\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_3 \quad (109)$$

と表わされることを利用すると、一般の分離型ポテンシャルに対する以下の Skorniakov–Ter-Martirosian 方程式を得ます [54]

$$\frac{|\phi(q_0)|^2}{T(q_0, q_0)} F(\mathbf{P}_3) = -2 \int \frac{d^3 \mathbf{P}_1}{(2\pi)^3} \frac{\phi^* \left(-\frac{1}{2}\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1 \right) \phi \left(\frac{1}{2}\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_3 \right)}{P_3^2 + P_1^2 + \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_3 - mE + i0} F(\mathbf{P}_1) \quad (110)$$

この方程式は 3 次元の線形積分方程式ですが、球対称な分離型ポテンシャルの場合、 F を球面調和関数展開した際に

$$F(\mathbf{P}) = \sum_{\ell, m} F_{\ell, m}(\mathbf{P}) Y_{\ell, m}(\hat{\mathbf{P}}) \quad (111)$$

各 $F_{\ell, m}$ は独立になり、1 次元の線形積分方程式になります。これを数値的に解けば 3 体問題は解けたことになります。このように 3 体問題が最終的に非常に数値的に扱いやすい方程式に帰着するのが分離型ポテンシャルの強みです。

ステップ関数型の分離型相互作用 式 (46) と式 (47) から Λ が大きくなるときは

$$T^{-1}(k, k) \approx \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{a} + ik \right] = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{a} - \sqrt{-k^2} \right] \quad (112)$$

となります。さらに、 $|\frac{1}{2}\mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_1| < \Lambda$, $|\frac{1}{2}\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_3| < \Lambda$ という積分領域の条件も、 Λ が大きいときには $|\mathbf{P}_1| < \Lambda$ と近似でき、

$$\frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{a} - \sqrt{\frac{3}{4}P_3^2 - mE} \right] F(\mathbf{P}_3) = -2 \int_{|\mathbf{P}_1| < \Lambda} \frac{d^3 \mathbf{P}_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{P_3^2 + P_1^2 + \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_3 - mE + i0} F(\mathbf{P}_1) \quad (113)$$

を得ます。これは各部分波 $F_{\ell, m}(\mathbf{P})$ に対して独立な方程式を与えます。特に興味のある $\ell = 0$ の場合、角度積分については

$$\int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{1}{q^2 + p^2 + qp \cos \theta - mE + i0} = \frac{1}{qp} \log \left(\frac{q^2 + p^2 + qp - mE}{q^2 + p^2 - qp - mE} \right) \quad (114)$$

を用いることで、以下の形のシンプルな Skorniakov–Ter-Martirosian 方程式を得ます [54]

$$\left[\frac{1}{a} - \sqrt{\frac{3}{4}P_3^2 - mE} \right] F(\mathbf{P}_3) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\Lambda dP_1 \frac{P_1}{P_3} \log \left(\frac{P_3^2 + P_1^2 + P_1 P_3 - mE}{P_3^2 + P_1^2 - P_1 P_3 - mE} \right) F(\mathbf{P}_1) \quad (115)$$

ここで運動量カットオフ Λ を無限に取りたくなりますが、そのようにしてしまうと、 P が大きなところで $F(P)$ が非常に高速振動して、数値的にこの式が解けなくなります。このことは hyper-spherical 座標の方法で、ゼロレンジ理論を用いたら $R \rightarrow 0$ で波動関数が高速振動して Thomas

collapse が起こることに対応しています。Skorniakov–Ter-Martirosian 方程式の方法では、この Λ が 3 体パラメータに相当します²⁹。そしてこの式を数値的に解くことで図 12 のような、散乱長が負の領域から現れて、散乱長が正の領域で 2 体束縛状態 + 粒子に崩壊していく様子が得られます。ちなみに式 (115) から Efimov 状態の離散スケール不変性は解析的に示せます。そのことを見てみましょう。 $1/a = 0, E = 0, \Lambda \rightarrow \infty$ を考えると、積分方程式はスケール不変になるため、解は

$$F(P) = P^{\pm s-2} \quad (116)$$

となるべきです³⁰。これを代入すると、

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{2}{\pi} \int dx \log \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} \right) x^{\pm s-1} \quad (117)$$

となり、積分公式³¹

$$\int_0^\infty dx \log \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} \right) x^{\pm s-1} = \frac{2\pi \sin(\pi s/6)}{s \cos(\pi s/2)} \quad (118)$$

を利用して積分を実行することで s に対する決定方程式 (83) が得られます。 $s = i|s_0|$ という純虚数解に対して式 (116) の波動関数が実数になるようにすると、

$$F(P) = c_1 P^{i|s_0|-2} + c_2 P^{-i|s_0|-2} \quad (119)$$

となります。これはちょうど式 (87) の Fourier 変換のような形になっており、確かに Skorniakov–Ter-Martirosian 方程式 Efimov 状態特有の離散スケール不変な解がちゃんと含まれていることが分かります。

Skorniakov と Ter-Martirosian は、1957 年に重陽子と中性子の散乱問題を扱うためにこの積分方程式 (115) を導出し、解くことに成功していました。しかし、上記のような離散スケール不変な解が存在することを発見するまでには至らず、Efimov 状態の発見はその後 10 年以上待つことになります。Skorniakov と Ter-Martirosian が、あとほんの一步だけ考察を進めていれば、歴史は変わり、「Efimov 状態」ではなく「Skorniakov–Ter-Martirosian 状態」と呼ばれていたかもしれませんね。

Skorniakov–Ter-Martirosian 方程式の方法は積分方程式を扱うため、物理的明快さは hyper-spherical 方程式の方法に劣ります。しかし hyper-spherical 方程式の方法のような複雑なチャンネル結合が現れない点や、ステップ関数以外の分離型ポテンシャルを考えて相互作用ポテンシャルの詳細を取り込むような拡張が容易な点がその長所です。また、particle-dimer の間の s 波散乱長もほとんど同じ式から計算できます。導出は割愛しますが、

$$\left[\sqrt{\frac{3}{4}p^2 + a^{-2}} - \frac{1}{a} \right] a_{\text{AD}}(p) = \frac{p^2}{p^2 + a^{-2}} + \frac{2}{\pi} \int_0^\Lambda dq \frac{p}{q} \log \left(\frac{p^2 + q^2 + pq + a^{-2}}{p^2 + q^2 + pq + a^{-2}} \right) a_{\text{AD}}(q), \quad (120)$$

を数値的に解いて得られる解のゼロ運動量部分 $a_{\text{AD}}(p=0)$ が、particle-dimer の間の threshold エネルギー $E = -1/ma^2$ における散乱の s 波散乱長になります。

²⁹例えば、 $1/a = 0$ での基底状態のエネルギーは $\kappa^* = 0.18\Lambda$ となります。

³⁰ここで P の冪にあえて -2 を入れています。これは、最終的にこの s が hyper-angular 方程式の方法で求めた s と一致するようにしたかったからです。

³¹計算は複素積分などを用いると比較的簡単にできる。詳細は [65] などを参照。

3.3 Efimov 状態のユニバーサリティ

上記の理論では、系の相互作用ポテンシャルが短距離型である、 $1/a = 0, E \rightarrow 0$ という、非常にシンプルな仮定しかしていません。つまり、自然界のあらゆる形において、もし散乱長が発散的に大きければ、Efimov 状態は必ず現れて、低エネルギー領域で上記の理論で統一的に記述できます。そして、図 12 のエネルギースペクトルの形状や $e^{\pi/|s_0|} = 22.69..$ の離散スケール不変性が現れます。これが Efimov 状態のユニバーサリティです。また、ゼロレンジ理論で、Efimov 状態を記述するのに必要なパラメータは $1/a$ と 3 体パラメータのみでした。すなわち、この 2 つのパラメータによって、Efimov 状態はユニバーサルに記述されます。ちょうど 2 体問題のときに、散乱長のみで 2 体束縛状態がユニバーサルに記述できたのと類似しています。3 体パラメータとしては hyper-spherical 方程式の方法では (R_0, Λ) をとりましたが、ユニタリー極限での基底状態のエネルギー $E = -(\kappa^*)^2/m$ の κ^* や、散乱長が負の領域で Efimov 状態が 3 粒子に分解する臨界点 a_- や正の領域で 2 粒子束縛状態 +1 粒子に分解する臨界点 a_+ を 3 体パラメータとして採用することが多いです (図 12 参照)。これらはゼロレンジ近似の下では、

$$a_-^{-1} = -0.64\kappa^* \quad (121)$$

$$a_+ = -14.1\kappa^* \quad (122)$$

と 1 対 1 対応に結びつくことが式 (115) を数値的に解くことで示せます [12]。このように理想的な状況 $1/a \rightarrow 0, E \rightarrow 0$ ではユニバーサリティは厳密に成立し、あらゆる物理系を統一的に記述できるのですが、現実の物理系では、散乱長やエネルギーが有限です。その効果により、ゼロレンジ理論からズレが生じます。Sec. 5 で見るように、原子核系などでこれまでに Efimov 状態が明瞭に見えていない理由や、冷却原子で 2-3 個しか Efimov 状態が観測できないのは、これらのパラメータが有限で、理想的なゼロレンジ極限からズレているからです。

4 Efimov 状態の物理的理解をさらに深める理論

4.1 Born-Oppenheimer 近似

異種粒子混合系を考えましょう。2 粒子が同種ボース粒子 (質量 M) で、これらがもう 2 つが質量 m の粒子と大きな散乱長 a で相互作用すると仮定します。また、同種粒子間の相互作用は特に散乱長が大きくない通常の短距離相互作用をするとし、ひとまず無視します。もし $M \gg m$ のときには、Born-Oppheneimer 近似を使えます。Born-Oppenheimer 近似では、まず軽い粒子の Schrödinger 方程式を重い粒子を位置 $\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ に固定した下で解き、固有値 $E(r)$ を求めます ($r \equiv |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$)。Bethe-Peierls 境界条件の方法で重い粒子と軽い粒子の間の 2 体相互作用を取り込むと、軽い粒子の方程式は $\phi(\mathbf{y})$

$$-\frac{\nabla_{\mathbf{y}}^2}{2m}\phi(\mathbf{y}) = E(r)\phi(\mathbf{y}) \quad (123)$$

となり、 $|\mathbf{y} - \mathbf{x}_1| \rightarrow +0$ and $|\mathbf{y} - \mathbf{x}_2| \rightarrow +0$ で Bethe-Peierls 境界条件を課することになります。これは解析的に解け、特に $E(r) < 0$ の時の解は

$$\phi(\mathbf{y}) = \frac{\exp(-\kappa(r)|\mathbf{y} - \mathbf{x}_1|)}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}_1|} \pm \frac{\exp(-\kappa(r)|\mathbf{y} - \mathbf{x}_2|)}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}_2|}, \quad (124)$$

となります。ここで $\kappa(r)$ は Bethe-Peierls 境界条件から以下のように決められます

$$\kappa(r) \mp \frac{e^{-\kappa(r)}}{r} = \frac{1}{a}. \quad (125)$$

この決定方程式の解は、Lambert W 関数を用いて³²

$$\kappa_{\pm}(r) = \frac{1}{a} + \frac{1}{r} W(\pm e^{-r/a}), \quad (126)$$

と表せます。これより軽い粒子の固有値 $E(r)$ は

$$E_{\pm}(r) = -\frac{\kappa_{\pm}(r)^2}{2m}. \quad (127)$$

と与えられ、これを用いて重い粒子の間の Schrödinger 方程式は

$$\left[-\frac{\nabla_r^2}{M} + E_{\pm}(r) \right] \psi(r) = E \psi(r). \quad (128)$$

となります。図 13 に $E_{\pm}$ を示します。+ の時に引力的なポテンシャル、- の時には斥力的なポテンシャルが現れます。これは軽い粒子の波動関数式 (124) が原子分子化学の LCAO 軌道法で言う結合性軌道 (+) と反結合性軌道 (-) を形成しているため、それぞれ引力・斥力が形成していると理解できます。特に結合性軌道 (+) に対して

$$E_+(r) = \begin{cases} -\frac{\Omega^2}{2mr^2} & (r \ll a) \\ -\frac{1}{2ma^2} - \frac{1}{mar} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) & (r \gg a) \end{cases} \quad (a > 0) \quad (129)$$

になり、 $r \ll a$ で r^{-2} の引力が発生します。ここで $\Omega = W(1) = 0.5671\dots$ は $x = e^{-x}$ の解で、 Ω 定数と呼ばれます。このポテンシャルの下での方程式 (128) は Efimov 状態の方程式 (84) と同じ形をしています。そのため Efimov 状態が結合性軌道 (+) の方に現れ、 $1/a = 0$ で離散スケール不変性をもつ 3 粒子束縛状態が可算無限個現れます。そのスケール因子 $e^{\pi/|s|}$ は

$$|s|^2 = \frac{M}{2m} \Omega^2 - \frac{1}{4} \quad (130)$$

で与えられます。

これらの計算結果から以下のことが学び取れます：

1. Efimov 状態の本質は、1 つの粒子が残り 2 つの粒子の間に結合性軌道を組むことである。 実際、式 (124) において、結合性軌道が $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ それぞれの周りに $\min[r, a]$ くらいの幅で軽い粒子が分布していて、2 つの粒子の間に媒介して引力を形成していることが見て取れます。その意味で原子分子化学での共有結合と似たような現象なのですが、この現象が相互作用ポテンシャルのレンジ b よりもはるかに大きな長さスケール a で”ハロー”的に生じているのが顕著な違いです。

2. Efimov 状態の波動関数の形状は「細長い 2 等辺三角形」。 式 (124) より、軽い粒子はおおよそ $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ いずれかのまわりに存在することが分かります。従って、Efimov 状態の波動関数の形状は「細長い 2 等辺三角形」です。実際、hyper-spherical 座標の方法でも式 (80) より hyper-angular

³² xe^x の逆関数として Lambert W 関数は定義される。

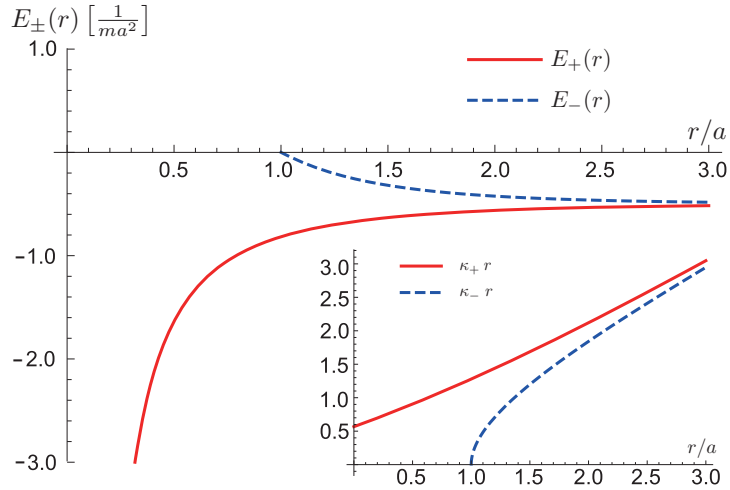


図 13: $a > 0$ において、Born Oppenheimer 近似で求めたポテンシャル $E_{\pm}$. Inset には $\kappa_{\pm}(r)r$ を示す。

波動関数は $\alpha = 0$ のまわりにピークを持ち、それは「細長い 2 等辺三角形」の形状を意味します。そして $\mathbf{x}_1$ まわりに存在することと $\mathbf{x}_2$ まわりに存在することの重ね合わせ状態になっています。 $|a| \gg b$ で、 $\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ がかなり離れている状況であっても、1 粒子目近傍に局在した状態と 2 粒子目近傍に局在した状態の重ね合わせ状態になっており、量子力学の非局所相関や猫状態を彷彿とさせます。このように Efimov 状態は非常に量子力学的な存在になっています。

3. Efimov 状態以外のチャンネルは斥力的で、Efimov チャンネルでのみ 3 体束縛状態は現れる。
 実際、反結合性軌道のポテンシャルは斥力型で、遠方で

$$E_-(r) \approx -\frac{1}{2ma^2} + \frac{\exp(-r/a)}{mar} \quad (r \gg a, a > 0) \quad (131)$$

と振舞います。この様子は式 (83) で引力（純虚数解）を生むチャンネルが 1 つで、それ以外が斥力的（実数解）であったことに対応しています。

4. Efimov 状態は有限散乱長では有限個しか現れない。 式 (129) の漸近的振舞いは、前節で得た漸近系式 (94) などと定性的には全く同じで、 r^{-2} 引力ポテンシャルが $r \lesssim |a|$ のみで現れます。また、 $a < 0$ の場合についても、短距離で r^{-2} 引力で、 $r = |a|$ の時に

$$E_+(r = |a|) = 0 \quad (a < 0) \quad (132)$$

となる、という点でやはり $r \lesssim |a|$ でのみ Efimov 効果は表れます³³。従って離散スケール不変性を持つ状態は、小さいほうは $r \sim b$ 、大きいほうは $r \sim |a|$ くらいまで存在します。これらの最小・最大の Efimov 状態のサイズ比 $|a|/b$ に対して、 $e^{\pi/|s|}$ 倍の離散スケール不変な状態がいくつ存在できるかを見積もると、Efimov 状態の数はおよそ

$$\frac{|s|}{\pi} \log \left(\frac{|a|}{b} \right) \quad (133)$$

³³ $a < 0$ での $r > |a|$ は Born-Oppenheimer 近似が成り立たない領域なので病的な振舞になります。 $a > 0$ での $E_-(r)$ の $r < a$ のポテンシャルが図 13 で描かれていないのも、同様に Born-Oppenheimer 近似が成立しない領域だからです。

個になります。この式より、Efimov 状態をたくさん観測したいのであれば散乱長を大きい必要がある、という重要なポイントが理解できます。

5. Efimov 状態は $a < 0$ で 3 粒子に分解、 $a > 0$ で 2 粒子束縛状態 + 1 粒子に分解していく この挙動も、 $a < 0$ が $E_+(r = |a|) = 0$ となり遠方でゼロエネルギーに漸近しそうだということ、そして $a > 0$ で $E_+(r) \rightarrow -1/2ma^2$ と 2 粒子束縛状態のエネルギーに漸近していくことから見て取れます。

6. Efimov 状態は 3 粒子のうちの 2 つの相互作用が大きな散乱長が大きければ普遍的に現れる。 また、Efimov 状態のスケール因子は、質量比に依存する。 オリジナルの Efimov 状態の研究は同種 3 粒子に対するものですが、今回 2+1 粒子系でも Efimov 状態が生じました。また上述の Efimov 状態の物理的な理解から、3 粒子系で相互作用 2 つ以上が大きな散乱長を持ち、1 つの粒子が他の粒子間の引力を媒介し結合性軌道を組めれば Efimov 状態が現れると期待されます。実際、異種粒子混合系についても hyper-spherical 方程式の方法で解析的に 3 体問題を解くと Efimov 状態が現れます。ただしそのスケール因子は式 (130) から分かるように、質量比に強く依存します。特に、質量比が非常に大きな「2 heavy + 1 light」の系だとスケール因子 $e^{\pi/|s|}$ が小さくなり Efimov 状態がたくさん見える可能性があります。このような系は Efimov favored な系と呼ばれる。反対に「1 heavy + 2 light」の系だとスケール因子 $e^{\pi/|s|}$ が大きくなりすぎて Efimov 状態がほとんど見えません。このような系は Efimov unfavored な系と呼ばれます。Hyper-spherical 方程式の方法で、解析的に 3 体問題を解いてそのスケール因子を様々な系で求めたものを図 14 に示します。スケール因子が質量比に依存して変化していく様子が見て取れます。また 3 つの粒子がすべて大きな散乱長で相互作用しているほうが、2+1 粒子系に比べてスケール因子が小さくなり、Efimov 状態がより見やすいことも、質量比 1 でのスケール因子 22.7 と 1986 を比較すると分かります。さらに上記の Born-Oppenheimer 近似 (破線) が大きな質量比領域でのみ良く成立する様子もこの図から見て取れます。

7. フェルミ粒子系でも Efimov 状態は現れる。ただし質量比が非常に大きな系でのみ。 これまで粒子たちはボース粒子を主に考えてきました。ではフェルミ粒子の場合はどうなるでしょう？特に $\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ が内部状態が同じフェルミ粒子 (i.e. スピン偏極している) とすると、それらの間の波動関数は反対称化しなければなりません。従って $r = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ の相対運動の角運動量は $L = 1, 3, 5, 7, \dots$ のみが許され、式 (128) は

$$\left[-\frac{1}{M} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{L(L+1)}{Mr^2} + E_{\pm}(r) \right] \psi(r) = E\psi(r). \quad (134)$$

となります。特に、 $r \ll |a|$ においては式 (129) を用いて

$$\left[-\frac{1}{M} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{s^2 - \frac{1}{4}}{Mr^2} \right] \psi(r) = E\psi(r). \quad (135)$$

$$s^2 = L(L+1) + \frac{1}{4} - \frac{M}{2m} \Omega^2 \quad (136)$$

となります。つまりこのフェルミ系においては角運動量ポテンシャルによる斥力と Efimov 効果により引力が競合しています。その相対的な強さを制御するのが質量比になっています。質量比

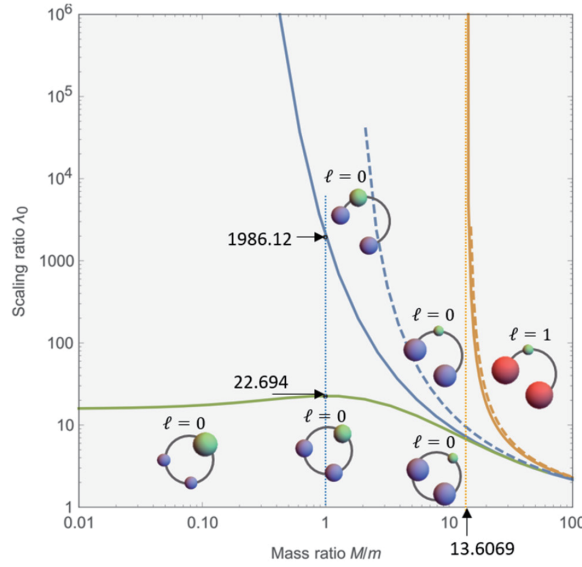


図 14: Efimov 状態のスケール因子 $e^{\pi/|s|}$ の質量比依存性 ([15] より引用)。実線は Hyper-spherical 方程式により解析解で、破線は Born-Oppenheimer 近似により得られたもの。緑線は 3 粒子全ての間の相互作用の散乱長が発散的に大きな系。青線は 2 つの相互作用の散乱長が発散的に大きな系。橙色は角運動量が $J = 1^-$ でフェルミ粒子系に対応する。

M/m が小さな系では角運動量ポテンシャルによる斥力が強く Efimov 状態は生じません。しかし質量比が

$$\frac{M}{m} \geq \left(\frac{M}{m}\right)_E = \frac{2}{\Omega^2} \left[L(L+1) + \frac{1}{4} \right] = 13.992 \dots \quad (L=1) \quad (137)$$

を超えたときに Efimov 引力が角運動量ポテンシャルに打ち勝って Efimov 状態が現れます。この臨界質量は Born-Oppenheimer 近似で求められたものですが、hyper-spherical 方程式の方法で厳密に求めると 13.6069... となります [3, 66]。値は非常に良く一致しており、Born-Oppenheimer 近似が非常に良い近似になっていることが見て取れます。図 14 に Born-Oppenheimer 近似で求められた Efimov 状態のスケール因子と、hyper-spherical 方程式の方法で厳密に求められた Efimov 状態のスケール因子の比較を示します。質量比が大きな領域で両者が良く一致しています。

このフェルミ粒子系の議論から、Efimov 状態を見るには排他律が働かない系の方が良い、ということが分かります。また、上記の議論で角運動量ポテンシャルが $1/M$ に、Efimov 引力が $1/m$ に依存して競合した様子は、実は一般の Efimov 状態についても起こっています。すなわち、運動項のゼロ点エネルギーによる斥力と Efimov 引力が常に競合しています。その競合の結果、Efimov 状態が現れるのです。図 14 でスケール因子が質量比に強く依存するのも、運動項のゼロ点エネルギーによる斥力と Efimov 引力の相対的な強さが質量比を変えることで変化するためなのです。

4.2 繰り込み群

Efimov 状態の離散スケール不変性は、繰り込み群の手法でも理解でき、リミットサイクル解に相当します。Wilson は繰り込み群を提唱した論文 [67, 68] で繰り込み群の Flow には安定・不安

定な Fixed point 解以外に、リミットサイクル解が存在することを指摘していました³⁴。このことをこの説では解説します。詳細な計算は [12] に任せて、ここでは Skorniakov–Ter-Martirosian 方程式を用いた簡便な導出のみを行います。前節では 2 体の分離型ポテンシャルが存在する場合を考えましたが、3 体の分離型ポテンシャル

$$V = g_3 |\phi_3\rangle\langle\phi_3| \quad (138)$$

も存在する場合に Skorniakov–Ter-Martirosian 方程式がどのように変更を受けるか考えましょう。ここで ϕ_3 は最も単純なステップ関数型

$$\langle \mathbf{p}_3, \mathbf{P}_3 | \phi_3 \rangle = \begin{cases} 1 & (|\mathbf{p}_3|, |\mathbf{P}_3| < \Lambda) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (139)$$

を考えます。すると、式 (97) は

$$\text{左辺に } +mg_3 \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{P}}{(2\pi)^3} \Psi(\mathbf{q}, \mathbf{P}) \quad (140)$$

と変更を受け、式 (103) は

$$\text{右辺に } - \frac{\overline{g_3}}{p_3^2 + \frac{3}{4}P_3^2 - mE + i0} \quad (141)$$

$$\overline{g_3} \equiv mg_3 \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{P}}{(2\pi)^3} \Psi(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \frac{g_3}{g} \int \frac{d^3\mathbf{P}}{(2\pi)^3} F(\mathbf{P}) \quad (142)$$

となります。これを最後まで続けると、

$$\left[\frac{1}{a} - \sqrt{\frac{3}{4}P_3^2 - mE} \right] F(P_3) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\Lambda dP_1 \frac{P_1}{P_3} \log \left(\frac{P_3^2 + P_1^2 + P_1 P_3 - mE}{P_3^2 + P_1^2 - P_1 P_3 - mE} \right) F(P_1) + \frac{2\overline{g_3}}{\pi} \int_0^\Lambda \frac{q^2 dq}{q^2 + \frac{3}{4}P_3^2 - mE} \quad (143)$$

を得ます。この両辺を Λ で微分し、3 体の coupling constant g_3 が Λ に対してどのような依存性を見ましょう。 Λ が大きく、 E が小さいときには最終項の積分は

$$\int_0^\Lambda \frac{q^2 dq}{q^2 + \frac{3}{4}P_3^2 - mE} \approx \int_0^\Lambda \frac{q^2 dq}{q^2} = \Lambda \quad (144)$$

と近似でき、

$$\frac{d}{d\Lambda} (\Lambda \overline{g_3}(\Lambda)) = \left[\frac{P_1}{P_3} \log \left(\frac{P_3^2 + P_1^2 + P_1 P_3 - mE}{P_3^2 + P_1^2 - P_1 P_3 - mE} \right) F(P_1) \right]_{P_1=\Lambda} \quad (145)$$

となります。ここで右辺も $\Lambda \rightarrow \infty$ では

$$\frac{\Lambda}{P_3} \log \left(\frac{P_3^2 + \Lambda^2 + \Lambda P_3 - mE}{P_3^2 + \Lambda^2 - \Lambda P_3 - mE} \right) F(\Lambda) = \frac{\Lambda}{P_3} \log \left(\frac{1 + P_3/\Lambda + \dots}{1 - P_3/\Lambda + \dots} \right) F(\Lambda) \approx 2F(\Lambda) \quad (146)$$

と良く近似できます。式 (116) を代入し、 $s = i|s_0|$ を代入すると

$$\frac{d}{d\Lambda} (\Lambda \overline{g_3}(\Lambda)) = 2\Lambda^{\pm i|s_0|-2} \quad (147)$$

³⁴Wilson がこの論文を発表した 1971 年が Efimov 状態の発見とほぼ同じ時期なことも興味深い。

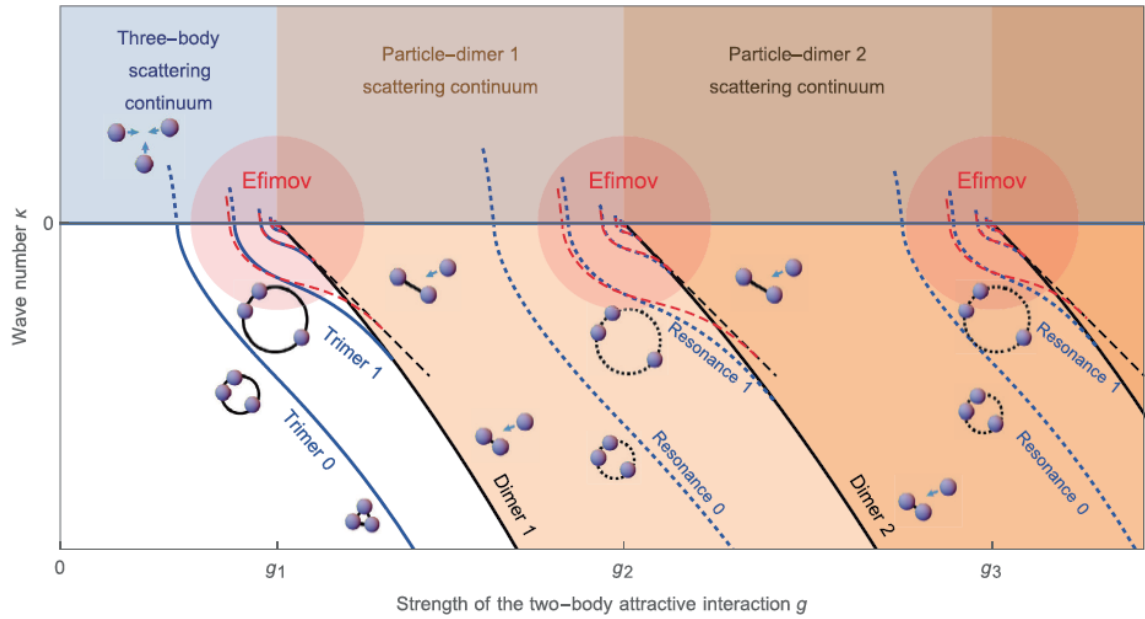


図 15: 引力のモデルポテンシャル $gV(r)$ で 3 体問題を解いた時のエネルギースペクトルの挙動の概念図 ([15] より引用)。ゼロレンジ理論による Efimov 状態のスペクトル (赤破線) をモデルポテンシャルの 3 体束縛状態 (青実線) と 3 体共鳴状態 (青破線)。2 体束縛状態については、モデルポテンシャルにおける束縛エネルギー (黒実線) とゼロレンジ理論による式 (17)(黒破線) を示す。

となります。この繰り込み群方程式の右辺は $\log \Lambda$ に対して周期的な振動をし、リミットサイクルのように周期的に振舞うことが見て取れます。実際、この微分方程式を解くと

$$\overline{g_3}(\Lambda) = \frac{2}{\pm i|s_0| - 1} \Lambda^{\pm i|s_0| - 2} \quad (148)$$

となり、特に $\overline{g_3}$ が実数になるように $\pm$ の解をうまく足し合わせると

$$\overline{g_3}(\Lambda) = -\frac{1 + |s_0|^2}{2} \left[\frac{1}{i|s_0| - 1} \left(\frac{\Lambda}{\Lambda^*} \right)^{i|s_0| - 2} + \frac{1}{-i|s_0| - 1} \left(\frac{\Lambda}{\Lambda^*} \right)^{-i|s_0| - 2} \right] \propto \frac{1}{\Lambda^2} \cos \left[s_0 \log \frac{\Lambda}{\Lambda^*} + \Delta(s_0) \right] \quad (149)$$

のような形に $\overline{g_3}(\Lambda^*) = 1$ となる適当な運動量スケール Λ^* を使って表せます。これより 3 体の coupling constant $\overline{g_3}$ が運動量スケール Λ を変えるにつれて、周期的に振動する様子が分かります。つまり、3 体の結合定数 g_3 が、運動量スケール Λ を変えていくと、周期的に振動・回帰するというリミットサイクル的な挙動をするのです。

Fixed point 解に比べ、繰り込み群のリミットサイクル解は非常に稀であり、Efimov 状態 (とそれに関連する現象) は人類がこれまで自然界で観測できた唯一の量子系におけるリミットサイクル解です³⁵。

³⁵ 量子系がリミットサイクルを示す数理的なモデルは [69, 70, 71] などに提唱されています。また古典系では Belousov-Zhabotinsky 反応など、リミットサイクル的な挙動を示す系が多く知られています。

4.3 Finite-range effects と現実的なモデルポテンシャルにおける Efimov 状態の挙動

これまでの議論は理想的な $1/a = 0, E \rightarrow 0$ 付近での Efimov 状態の性質を議論しましたが、現実の系では散乱長もエネルギーも有限です。そのため幾分ゼロレンジ理論で求めた Efimov 状態の性質からのズレが生じます、これを有限レンジ効果 (Finite-range effects) と呼びます。図 15 に、引力型の有限レンジポテンシャルの深さを次第に深くしていった時の、2 粒子・3 粒子系のエネルギースペクトルの挙動を示します。1 つ目の 2 体束縛状態 (Dimer 1) が現れ、散乱長が発散的に大きくなる領域で 3 粒子束縛状態が無数に現れます。その高励起状態はゼロレンジ理論によるスペクトル形状 (赤破線) と非常に良く一致するのですが、基底状態 (Trimer 0) と第一励起状態 (Trimer 1) についてはズレが見えます。特に基底状態 (Trimer 0) については赤破線は描いていませんが、ズレがかなり大きいです。実際、引力ポテンシャルについては 3 粒子束縛状態の基底状態のエネルギーは 2 粒子の基底状態エネルギー (Dimer 1) よりも小さいという定理があるため [72, 73, 74]、3 粒子束縛状態の基底状態 (Trimer 1) は dimer+particle には分解しません。第一励起状態 (Trimer 1) については、広い散乱長領域でゼロレンジ理論と良く一致するのですが、散乱長が正の側、特に 3 粒子が dimer+particle には分解するとゼロレンジ理論で予言される a_* あたりでズレが大きくなります。実際、原子の van der Waals 相互作用を取り入れた 3 体系の計算で、やはり a_* は第一励起状態ではギリギリ現れない³⁶、ということが分かっています [39, 75]。

2 つ目、3 つ目の 2 粒子束縛状態が現れる近傍の領域 (i.e. Dimer 2, Dimer 3 の束縛エネルギーが 0 に漸近する領域) についても Efimov 状態は現れます。しかし、図に破線で “Resonance 0”, “Resonance 1” などと示される通り共鳴状態として現れます。これは 1 つ目の 2 粒子束縛状態 (Dimer 1)+1 粒子などの連続状態に埋め込まれており、それらの状態への崩壊が起こり、有限寿命を持つためです。一般的に、この寿命はそこそこ長く、Efimov 状態の共鳴状態としての幅はまあまあ小さいです。というのは、Efimov 状態は空間的に非常に広がっており、強く束縛された 2 粒子束縛状態+1 粒子との重なり積分が小さいからです。これが冷却原子というポテンシャルが深く decay チャンネルが多数存在する系でも Efimov 状態が明瞭に観測できる理由です。

Efimov 状態は散乱長を負に変化 (g を小さく) させていって、3 粒子に分解した後は共鳴状態になります。この様子も図 15 に青破線として示してあります。これは式 (95) や式 (132) から分かるように $a < 0$ で遠方でのポテンシャルが斥力であるためです。この斥力は運動項のゼロ点エネルギーに由来しています。冷却原子の実験で、低温・低エネルギーとは言え、有限のエネルギーの系で Efimov 状態が明瞭に観測にかかるのは、このように $E > 0$ でバーチャル状態ではなく共鳴状態になるおかげです。一方、散乱長が正の方で Efimov 状態が dimer+particle に分解した後はバーチャル状態になります。

5 物理系における Efimov 現象の観測・予言

この節では、Efimov 状態が様々な物理系でどのように観測・予言されているかを、それぞれ紹介していきます。

³⁶3 体束縛状態が dimer+atom に分解はしませんが、かなりに接近するため、atom-dimer 散乱の増大が現れます。それが冷却原子の実験で a_* として観測されています。

5.1 冷却原子気体

ロスレートによる Efimov 状態の観測 最も明瞭に Efimov 状態が観測されているのが冷却原子です。散乱長を自在に制御することを可能にする Feshbach 共鳴が 1998 年に観測された直後に、散乱長が大きなボース原子気体を実現して、その原子気体中の原子数の時間変化を観測することで Efimov 状態の兆候を観測できるという理論提案がなされました [76, 77]。その手法は次の通りです：冷却原子気体の実験は、レーザー等により原子を真空チャンバーの真ん中あたりに捕捉し実験を行いますが、時間が経つにつれて、その原子数は徐々に減少していきます。原子数密度 n の時間変化を記述するレート方程式は

$$\frac{dn}{dt} = -L_1 n - L_2 n^2 - L_3 n^3 \quad (150)$$

です。ここで L_1, L_2, L_3 はそれぞれ 1 体・2 体・3 体ロスレートと呼ばれる量です。1 体ロスレートは外部からの擾乱等により原子がトラップ捕捉から飛び出していくレートを記述する量です。一方、2 体・3 体のロスレートは原子 2 つ・3 つが非弾性衝突してトラップ捕捉から飛び出していくレートを記述する量です。原子気体で非弾性衝突が起こった場合は、eV スケールの原子・分子の内部エネルギーが解放されて、原子・分子の kinetic energy に変換されるのですが、そのエネルギースケールはレーザー等による捕捉ポテンシャルの強さより遥かに大きいため、通常は非弾性衝突が生じたとたんに、その原子たちはレーザー捕捉の外へと吹き飛んでいき、原子気体から失われていしまいます³⁷。この L_3 に Efimov 状態の兆候が現れます。というのは Efimov 状態という 3 粒子束縛状態が形成されれば、3 原子が衝突する散乱断面積が増大し、その結果ロスレートが増大するからです。実際、負の散乱長側では図 12 の a_- 付近 (Efimov 状態が 3 原子に分解する threshold 近傍) で、 L_3 がピーク的に増大するということが図 16 の実線のように理論的に示されました。そしてそのピークが 22.7 という Efimov 状態のスケール因子で周期的に続いています。正の散乱長でも L_3 に Efimov 状態特有の 22.7 を周期とする周期的な振動が現れます (図 17 の実線参照)。散乱長が負の領域と異なりピーク構造は現れず、のっぺりした山とディップが周期的に現れます。これは $a > 0$ においては束縛エネルギー $-1/ma^2$ の 2 体束縛状態があるため、次の 2 つの化学反応プロセスが量子干渉を起こすためです：(i) 3 原子 $\Rightarrow$ 束縛エネルギー $-1/ma^2$ の 2 原子束縛状態 + 1 原子 $\Rightarrow$ 束縛エネルギー $-1/mr_{\text{vdw}}^2$ の 2 原子束縛状態 + 1 原子 (ii) 3 原子 $\Rightarrow$ 束縛エネルギー $-1/mr_{\text{vdw}}^2$ の 2 原子束縛状態 + 1 原子。

これら 3 体ロスレート L_3 に現れる特徴的なピークやディップをはじめに観測したのがインスブルック大学の Grimm のグループです [2]。Cs 原子に対して Feshbach 共鳴を用いることで散乱長を変化させながら L_3 を観測することで、図 16 のように $a < 0$ で明瞭なピーク、 $a > 0$ でディップのようなものが観測されました。この当時の Efimov 状態に関する理論ではピーク・ディップの位置 a_- や a_+ の正確な位置を予言することは不可能だったのですが、その相対値 $|a_+/a_-|$ は予言できました。ゼロレンジ理論で予言された $|a_+/a_-| = 0.96$ [12] と良く一致する値 $|a_+/a_-| = 1.25$ (9) が、この観測により得られました³⁸。

この初期の実験では、Efimov 状態に関する理論による予言とコンシステントな L_3 の挙動が見えた一方で、「22.7」という Efimov 状態特有の離散スケール不変性の観測はできませんでした。

³⁷非弾性衝突の結果生じた分子をイオントラップを用いて捕捉する実験も報告されています [78]。

³⁸この実験の a_- は基底 Efimov 状態のもので、 a_+ は第一励起 Efimov 状態のもので、基底 Efimov 状態は $a > 0$ で Finite range effects を強く受けるため、ディップ構造 a_+ などは生じません。

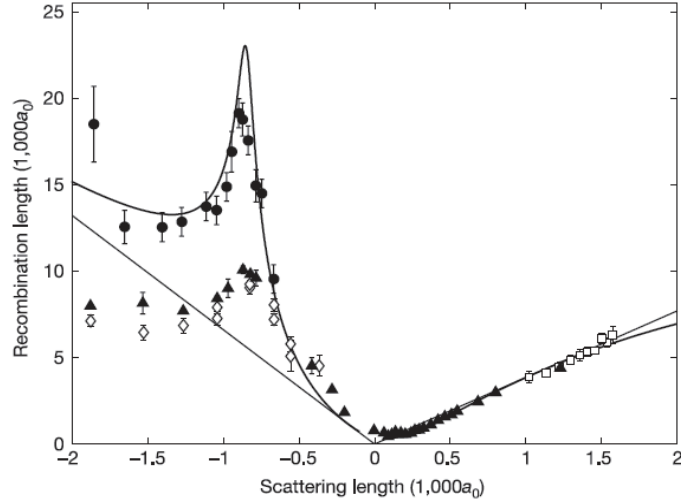


図 16: Recombination length $\rho \propto L_3^{1/4}$ の散乱長依存性の測定による Efimov 状態の観測 ([2] より引用)。 $a_0 = 0.52... \times 10^{-10}$ m は原子単位。黒丸は低温 $T = 10$ nK でのデータ。白四角と黒三角はより高温 $T = 200$ nK, 450 nK におけるデータ。太実線はゼロレンジ理論による理論曲線 [12, 77]、細実線は $L_3 \propto a^4$ というスケーリング曲線。

それを実現するためには、より大きな散乱長を安定に実現する実験がなされるのを待つ必要がありました。そのような実験がなされて報告がされたのが 2009 年です。アメリカ・イスラエル・イタリアの 3 つのグループが独立に、Cs とは異なる原子 (Li と K 原子) に対して L_3 を測定しました [7, 8, 9]。その結果、Grimm のグループの実験と同様のピーク構造とディップ構造がより明瞭に観測されました (図 17)。特に $a > 0$ の領域で周期的な振動 1 周期分が観測され (図 17(a) と (c))、その観測された周期 22 ± 4 が Efimov 状態の「22.7」と一致し、Efimov 状態の離散スケール不変性が歴史上はじめて実測されました。

これらの実験は一見非常に美しい Efimov 状態の観測なのですが、注意が必要なことがあります。それは L_3 という「原子がいなくなった」ことにより Efimov 状態を観測していることです。もし観測をしている途中で実験系に、電磁場ノイズや振動などが偶然加わり、それにより原子ロスレートがピーク的に増大した場合、 L_3 にピークが現れてしまいます。もしその位置などがたまたま Efimov 理論により予言される散乱長と一致した場合、Efimov 現象によるロスレートの増大と誤って解釈してしまう可能性もあります。実際、そのようなことが図 17(a) で起こっています。図 17(a) の $a < 0$ においてピークが 2 つ見えて、当初は左のピークが Efimov 状態のピーク、右のピークは Efimov 状態の付随した 4 体束縛状態のピーク (Sec. 6.1 参照) と解釈されていましたが、後の再実験で左側のピークは観測されず、右のピークのみが見えることがわかりました [40]。実は右の方のピークが Efimov 状態による L_3 ピークだったのです。また、散乱長が大きい領域では Feshbach 共鳴の散乱長と磁場の関係式が微修正を受けるだけで理論曲線と実験データの比較がだいぶ修正を受けてしまう、というのも注意点です。実際、そのようなことが図 17(c) で起こっています。図 17(c) の $a < 0$ の側でピークが 2 つ見えて、それが理論曲線による 22.7 の周期と良く一致しているように見えています。しかし後の Feshbach 共鳴の散乱長と磁場の関係式を改善した再実験をすると、 $a < 0$ の 2 つ目のピークは見えていないことがわかりました [31]。この $a < 0$ の

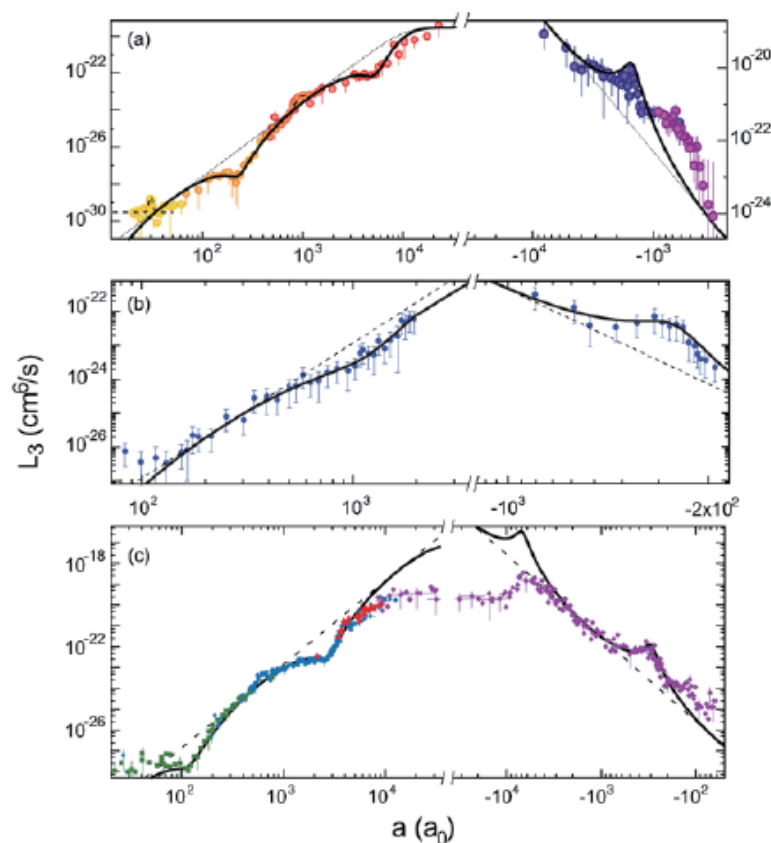


図 17: Efimov 状態のロスレート L_3 のよる観測 ([14] より引用)。(a) イタリア (^{39}K 原子)[7]、(b) イスラエル (^7Li 原子)[8]、(c) アメリカ (^7Li 原子)[9] のグループの実験データがそれぞれ示されている。実線はゼロレンジ理論による理論曲線 [12]。点線は $L_3 \propto a^4$ というスケーリング曲線。

側で 2 つ目のピークは 2014 年に Grimm らのグループによって最終的に明瞭に観測され、その周期は 21.0 ± 1.3 と観測されました [79]。このように、一流誌に出版された結果が数年後に「やっぱり見えませんでした」となることも多々あるため、ロスレートによる Efimov 状態の観測やその理論的な吟味をする際にはかなり注意が必要であったりします。

冷却原子で Efimov 状態は何個 (何周期) 観測可能か？ これらの実験では 2 個の Efimov 状態、すなわち 1 周期が観測されました。しかし 2 個目（第一励起 Efimov 状態）を観測するだけでも非常に困難な実験です。というのは第一励起 Efimov 状態のサイズは $\langle r \rangle = 1 \mu\text{m}$ くらいであるため、それよりも熱的ドブロイ長や平均粒子間隔が大きな極低温まで冷却した希薄な気体を実現する必要があります。もし第二励起 Efimov 状態を見たいとなると、 $\langle r \rangle = 20 \mu\text{m}$ となり、温度がさらに 500 倍も低く、密度も 20 倍小さな冷却原子気体を実現しなくてはなりません。そのため現在では同種ボソン系では Efimov 状態は 2 個、1 周期しか観測できていません。

一方、前節で紹介した通り、質量インバランスが非常に大きな系では Efimov 状態のスケール因子は非常に小さくなります。そのことを利用して Efimov 状態を 3 個 (2 周期) 観測した実験があります [80, 81]。用いたのは Cs 原子と Li 原子の混合冷却原子気体です。Cs 原子と Li 原子の

質量比は 22 と非常に大きいため、Cs-Cs-Li の Efimov 状態のスケール因子は 4.88 と非常に小さくなります。このことを利用して Cs-Li 混合原子気体で 3 体ロスレート測って Efimov 状態を $a < 0$ で 3 個 (2 周期) 観測することに成功しました。ピークの位置の比は、それぞれのグループで $|a_-^{(2)}/a_-^{(1)}| = 4.8 \pm 0.7$, $|a_-^{(1)}/a_-^{(0)}| = 5.1 \pm 0.2$ [80] と $|a_-^{(0)}/a_-^{(1)}| = 5.07 \pm 0.15$, $|a_-^{(2)}/a_-^{(1)}| = 4.0 \pm 0.3$ [81, 82] と報告され、ゼロレンジ理論による予言 4.88 と比較的良く一致しています。エラーバーよりも幾分外れているように見えるのは、有限レンジ補正や Cs-Cs 原子間の相互作用の効果や有限温度効果によるものだと思われます [82, 83]。

Efimov 状態の直接観測 上記の実験で Efimov 状態の離散スケール不変性が明確に検証された一方、その最大の短所は「原子がいなくなった」ことを見る間接測定であることです。Efimov 状態を直接合成・観測しようという試みも、冷却原子の実験で行われています。散乱長が正の側において、束縛エネルギー $-1/ma^2$ の 2 体束縛状態と原子の混合気体を用意します。そして電磁場を与えることで、この dimer + particle 状態を Efimov 状態へと遷移させます。与えている電磁場の周波数が dimer + particle の threshold と Efimov 状態のエネルギーの差にちょうど合った時に、電磁場の吸収のピークが見え、これにより Efimov 状態の直接合成、およびそのエネルギーの直接測定ができます。⁶Li 原子気体を用いてそのような実験が、ドイツと日本のグループで行われました [84, 85]。また、3 particle から直接 Efimov 状態を合成させる実験も成功しています [86]。ただし、これらの実験で直接合成された Efimov 状態は、すぐさま $-1/mr_{\text{vdw}}^2$ の 2 原子束縛状態 + 1 原子へと崩壊して、原子気体のレーザー等による捕捉から飛び出していなくなってしまいます。

5.2 ⁴He 原子クラスター

上記の冷却原子では散乱長を自在に変化させながら実験ができる一方で、Efimov 状態は不安定で、形成後すぐいなくなってしまうという欠点があります。一方、Efimov 状態を安定に実現できる系が ⁴He 原子です。⁴He 原子は前節で紹介した通り、原子間の散乱長が非常に大きい稀有な系です。そのため、⁴He 原子 3 つの 3 体問題を考えると、3 粒子束縛状態がいくつも現れ、Efimov 状態が現れるだろうと 1970 年代から指摘されていました [5]。⁴He 原子間の現実的なポテンシャルを用いて量子 3 体問題を正確に解くと、3 粒子状態が 2 つ安定な束縛状態として (i.e. 2 粒子束縛状態の threshold より下に) 現れます。その基底状態は有限レンジ効果を強く受けるため、ゼロレンジ理論の Efimov 状態とは異なる形状・性質を持っていますが、励起状態の方はエネルギースペクトルの形や波動関数の形状がゼロレンジ理論と非常に良く一致します。このことから、⁴He 原子の 3 粒子束縛状態のうちの第一励起状態は明確に Efimov 状態といわれてきました。

2015 年にその Efimov 状態の観測に初めて成功したのがドイツのグループです [10]。その手法は原子波回折と Coulomb explosion という 2 つの手法を組み合わせることによるものです。まず ⁴He 原子をノズルから噴出することで、1 原子状態、2 原子束縛状態、3 原子束縛状態などさまざまな状態が混ざった原子ビームを用意します。それを回折格子に当てて回折させることで、質量の異なる原子、2 原子、3 原子クラスター状態をそれぞれ分離します。このような実験は 1990 年代から行われ、それにより既に 2 原子束縛状態、3 原子束縛状態やそのおおよそのサイズが観測されていました [87]。しかし 3 原子状態で観測されていたのは基底状態のみで、励起状態は観測できていませんでした。2015 年の実験では Coulomb explosion という手法をさらに使うことで、

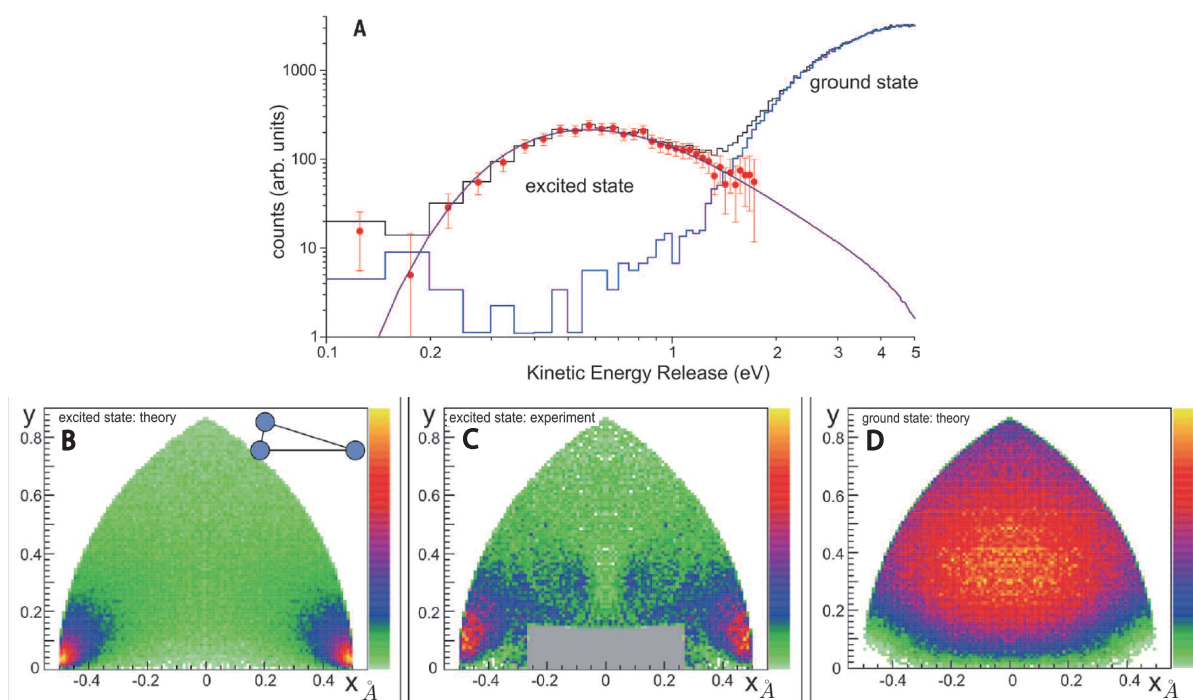


図 18: ^4He 原子クラスターにおける Efimov 状態の観測 ([10] より引用)。(A) 原子をイオン化させた際の Coulomb explosion 現象により観測された kinetic energy release $E_{KER} = e^2/r_{12} + e^2/r_{23} + e^2/r_{31}$ の分布。 ^4He 原子の圧力が高く、基底 trimer 状態のみからなる場合 (青) と、低圧で基底 trimer・励起 trimer 状態の混合になっている場合 (黒) のデータを実験で得て、その差分から励起 trimer 状態由来の E_{KER} (赤丸) が得られた。紫実線は励起 trimer 状態の E_{KER} の理論計算。(C) E_{KER} のデータから得られた励起 trimer 状態の波動関数。1 つ目と 2 つ目の粒子を $(x, y) = (-0.5, 0)$ と $(0.5, 0)$ の位置に固定した際の 3 つ目の粒子の確率密度分布を示す。(B) と (D) は理論計算により得られた、基底 trimer と励起 trimer の確率密度分布。

Efimov 状態である励起状態の方の 3 原子束縛状態を観測することに成功しました [10]。Coulomb explosion では、短パルスレーザーや自由電子レーザーなどの強い光を原子に当てて瞬間的に原子から電子と取り去ることで、3 原子束縛状態を 3 つの正電荷状態に変換します。すると正電荷の原子同士が反発して、あたかも爆発するかのように分解しふき飛んでいきます。その飛び去った正電荷の原子の速度をすべて測ることで、kinetic energy として解放された Coulomb エネルギーの和 $E_{KER} = e^2/r_{12} + e^2/r_{23} + e^2/r_{31}$ が観測できます³⁹。ここで r_{ij} は初期状態での原子間の距離です。この E_{KER} の分布を測定したものが図 18(A) です。3 粒子束縛状態の基底状態からの寄与と励起状態からの寄与が明瞭に分かれて観測されています。

この E_{KER} の分布は、初期の波動関数の確率密度分布の情報を反映しているため、これから波動関数を再構成できます。このようにして観測により得られた励起 trimer 状態の波動関数の形状が図 18(C) に示されています。理論で得られた励起状態の確率密度分布数図 18(B) と非常に良く

³⁹ 3 原子の束縛エネルギーや初期状態の運動エネルギーは ≤ 100 mK 程度で、Coulomb 相互作用エネルギー ~ 1 -10 eV に比べてはるかに小さく、無視できる。これが Coulomb explosion により r_{ij} の分布を求めて、確率密度分布を再構成できる理由でもある。

一致するものが実験で得られています。この確率密度分布は、まさに前節で議論したゼロレンジ理論における Efimov 状態の波動関数の特徴と一致しています。すなわち 1 つの原子が他の 2 つの原子の間に結合性軌道を生じていて、細長い三角形のような形状をしているのです。このことから 3 体束縛状態の励起状態は Efimov 状態と言えます。一方 3 体束縛状態の基底状態の波動関数が図 18(D) に示されています。この波動関数は先ほどのものと異なり正三角形のような形状をしています。このことから ^4He 原子 3 体系の基底状態は Efimov 状態とはあまり言えないことがみてとれます。

この Coulomb explosion による Efimov 状態の観測は冷却原子と比べ、散乱長を変えられないので 22.7 というスケール不変性は確認できない一方、(i)Efimov 状態が安定な 3 体束縛状態として存在する (ii) 波動関数の確率密度分布の直接観測が可能、という 2 つの大きな利点があります。また、この技術を用いた ^4He 原子系の精密観測も進んでいます [49]。3 体系ではなく、2 体系に対して Coulomb explosion で $E_{KER} = e^2/r_{12}$ を測ることで、 ^4He 原子 2 体系の波動関数を直接精密観測することが可能になり、QED 補正 [88] などの効果まで実験で観測できるまでになっています。

5.3 三重水素 ^3H 核

Efimov 自身が 1970 年の論文で Efimov 状態が現れる可能性を議論した系の 1 つが三重水素 ^3H 核です。Sec. 2.6 で議論したように陽子・中性子間の s 波散乱長はかなり大きいので、陽子 1 つ中性子 2 つからなる 3 体系を考えると、Efimov 状態が現れる可能性があります。Efimov 状態の数を式 (133) を用いて見積もってみると、1 つくらい Efimov 状態が現れることが分かります。実際に陽子 1 つ中性子 2 つの 3 体問題を解くと、束縛状態が 1 つだけ存在し、これが三重水素 ^3H の基底状態になっています。この状態が Efimov 状態といえるのかどうか、というのは微妙になってきます。というのは束縛状態が 1 つしかないため「22.7 倍」という Efimov 状態のスケーリング則の検証はできず、また冷却原子のように散乱長を実験で人工的に変化させることもできないからです。さらに Sec. 4.3 で議論した通り、基底状態は有限レンジ効果を強く受け、ゼロレンジ理論による Efimov 状態の挙動と大きく異なる挙動をします。これらの理由により、三重水素 ^3H は理想的な意味での Efimov 状態ではない、と言えます。

一方、より広い意味で Efimov 状態と見なすこともできます。原子核系では実験で散乱長を人工的に変化させることはできませんが、理論的に核子間相互作用を人工的に変化させることで核子間散乱長を変化させていった際に、エネルギー Spektrum がどのように振舞うかを見ることはできます。現実的な核子間散乱長の値では 1 つしか三粒子束縛状態は存在しませんが、核子間散乱長が無限になる unitary 極限近傍で数多くの 3 粒子束縛状態が現れ、それらが「22.7 倍」のスケーリング則に従う Efimov 状態であることが示せます。核子間散乱長をユニタリー極限から現実的な核子間散乱長の値に徐々に変化させていくと、Efimov 状態たちのうち、基底状態であったものが三重水素 ^3H の基底状態に連続的に移行していくことが示せます。このような意味で三重水素 ^3H の基底状態も Efimov 状態と密接に関わっているといえます。

図 19 に陽子・中性子間の散乱長⁴⁰を変化させながら、陽子・中性子の 3 体問題を理論的に解い

⁴⁰陽子と中性子の間にはスピン・トリプレット (i.e. 陽子と中性子のスピンの平行) の場合の散乱長 a_t とスピン・シングレット (i.e. 陽子と中性子のスピンの反平行) の場合の散乱長 a_s があります。図 19 では、 a_s は実験値に固定し、 a_t を人工的に変化させている。なお、陽子と中性子にはアイソスピン対称性があるため、スピン反平行な 2 つの中性子間の散乱長は a_s と等しいと見なせる。

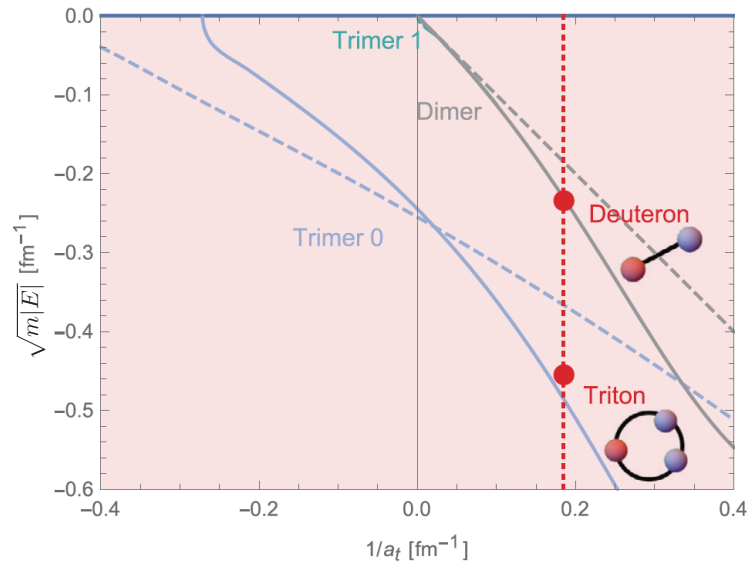


図 19: 陽子・中性子間のスピン・トリプレット $S = 1$ 状態の s 波散乱長 a_t を変化させた際の、陽子 1 つ中性子 2 つの 3 体系の束縛エネルギー ([15] より引用)。ゼロレンジ理論 (破線) および有限レンジ補正を取り込んだ理論計算 (実線) により得られた 2 体 (黒) 3 体 (青) 束縛状態のエネルギー。中性子間の散乱長 a_s は実験値 $a_s = -23.7148(43)$ fm に固定。重陽子の束縛エネルギー (赤丸 “Deuteron”) を再現するように陽子・中性子間の s 波散乱長 a_t を設定した際 (赤点線) の三重水素核の束縛エネルギーを赤丸 “Triton” で示す。 a_t が非常に大きい領域で励起 trimer 状態 (緑線。 “Trimer 1” と表記) も出現し、基底 trimer 状態 (“Trimer 0” と表記) と Efimov 理論によるスケール不変性で関係づけられる。

て得られたエネルギースペクトルを示します。きれいな「22.7 倍」のスケール則が成立する理想的な Efimov 状態を記述するゼロレンジ理論 (点線) は三重水素 ${}^3\text{H}$ の束縛エネルギーを全く再現できない一方、有限レンジ補正を加えた理論 (実線) は比較的良く再現していることが見て取れます。さらに、この基底状態は図 19 のユニタリー極限付近で現れている励起状態らと離散スケール不変性で関係づけられます。このように、三重水素核は理想的な Efimov 状態ではないのですが、「有限レンジ補正まで考慮した Efimov 状態の普遍的な挙動に従うという意味で Efimov 状態だ」と言えます。

ただし、最近の研究で原子核系における Efimov 状態は、冷却原子において観測されている基底 Efimov 状態とは定量的に異なるユニバーサリティを示すことが発見されたりしています。また、三重水素ではそのようなユニバーサリティを示すには陽子・中性子間の引力相互作用が弱すぎるためそのようなユニバーサリティを示さないということも指摘されています [53, 89]。有限レンジ効果が強く効く場合の Efimov 状態に関しては、現在様々な研究が進んでいる最中で、その理解が深まることで、三重水素 ${}^3\text{H}$ 核と原子における Efimov 状態の統一的な理解が深まることが期待されます。

5.4 ^{12}C 核の励起状態 (Hoyle 状態)

Efimov 自身が 1970 年の論文で Efimov 状態が現れる可能性を議論したもう 1 つの系が ^{12}C 原子核の励起状態 (Hoyle 状態) です。 ^{12}C 核には非常に寿命の長い励起状態が存在することが知られ、Hoyle 状態と呼ばれます。この状態は α 粒子 3 つが共鳴状態を組んでいる状態であり、この状態が宇宙における元素合成で非常に重要な役割を果たすことが知られています [90, 91, 92]。その結合エネルギー (i.e. α 粒子 3 つが独立に存在する際のエネルギーを基準として測ったエネルギー) は 0.38 MeV と非常に小さく、3 粒子が弱く結びついた状態だと言えます。また、 α 粒子 2 つの 2 体問題を考えた場合も、結合エネルギーが非常に小さな共鳴状態を形成 (^8Be 核に相当) します。従って、 α 粒子間の散乱長は非常に大きく、Hoyle 状態は 3 つの α 粒子が Efimov 状態を組んでいるのでは? と思えます [93]。この Hoyle 状態が Efimov 状態か否かの議論を複雑にするものが α 粒子間の Coulomb 相互作用です。これまで紹介した Efimov 状態の理論は Coulomb 相互作用しない荷電の無い粒子の 3 体問題に関するものなので、Coulomb 相互作用する 3 体系には直接適用できません。しかし、次のようにして Coulomb 相互作用する系で Efimov 状態が現れるかを定性的に議論できます。まず、Coulomb 相互作用は、その長さスケール a_C に比べて遠距離 $r > a_C$ では支配的な一方、短距離 $r < a_C$ では kinetic term や核力の方が支配的になり Coulomb 相互作用は無視できます。従って短距離領域 $r < a_C$ では Efimov 状態の理論が適用できます。一方、遠距離では適用できないため、 a_C が Efimov 状態が存在できる最大の長さスケールを与えます。また、Efimov 状態が存在できる最小の長さスケールは α 粒子間の核力のレンジ b で与えられます。以上のことから、存在できる Efimov 状態の数は、式 (133) を応用することで

$$\frac{|s|}{\pi} \log \left(\frac{\min[|a|, a_C]}{b} \right) \quad (151)$$

と見積もることができます。 α 粒子については a_C は 1.8 fm 程度であり、また α 粒子間の散乱長 a と相互作用レンジ b はそれぞれ $a = 5.4$ fm, $b = 3.4$ fm 程度 [94] であることを用いると⁴¹、Efimov 状態の数は 0 個程度、もし存在したとしても 1 個だけということがこの表式から分かります。従って三重水素の時と同様「たった 1 個しか 3 体状態が存在せず、離散スケール不変性などを明確に検証できないときに、これを Efimov 状態と判断できるのか?」という問題がでできます。また Coulomb 相互作用が存在するので、事態は三重水素の時よりもさらに複雑になります。

Efimov 状態の理論に Coulomb 相互作用を近似的に加えることで、 ^{12}C の Hoyle 状態を Efimov 状態として解釈できるかを探る研究が Higa と Hammer らによってなされています [96, 97]。図 20(A) のように α 粒子間の大きな散乱長によって現れる Efimov 効果の引力ポテンシャル (青実線) に Coulomb 斥力 (橙実線) を加えてえられた hyper-radial ポテンシャル (紫実線) の下では、 $R_0 = 0.122$ fm で波動関数が 0 になるような境界条件を手で入れると、Hoyle 状態のエネルギー (紫破線) が再現されます。もし Coulomb 相互作用がない場合には、この Hoyle 状態は Efimov 引力ポテンシャルの下での Efimov 状態になり (青破線)、その意味で「Hoyle 状態は元々は Efimov 束縛状態であり、Coulomb 相互作用によってエネルギーが正の共鳴状態になったもの」と定性的に言えそうです。しかしこの議論には、 α 粒子間の核力がちゃんと考慮されていないという問題があります。一見 $R_0 = 0.122$ fm で波動関数が 0 になるような境界条件を与えることが α 粒子間の核力を取り

⁴¹ α 粒子間の現象論的ポテンシャルを散乱実験のデータなどから構成し、そのうちの Coulomb 相互作用を除いた核力部分の散乱長とレンジ。

角形に近い形状をしており [95]、図 18(B) のような Efimov 状態特有の結合性軌道由来の細長い三角形の形状とは大きく異なっています。これらのことから Hoyle 状態はゼロレンジ理論の Efimov 状態とは大きく異なる性質のものだといえます。一方、図 20(B) の形状は図 18(D) に示した有限レンジの効果を強く受けた基底状態の Efimov 状態の形状に似ています。実は最近の荷電を持たない系における Efimov 状態の研究で、図 18(D) のような有限レンジの効果を強く受けた基底状態についても、Efimov 状態のユニバーサリティの概念が成立することが分かってきました [89, 99]。Hoyle 状態のような荷電を持つ系でも、この拡張された意味での Efimov 状態のユニバーサリティが成立しているのか否かは今後の興味深い課題の 1 つでもあります。

5.5 中性子過剰核。ハロー核

粒子間の散乱長が大きくなる原子核系の典型的な例が中性子過剰核です。原子核においては、陽子と中性子の数がほぼ同程度であるのが最もエネルギー的に安定なため、自然界で現れる安定な原子核では陽子と中性子の数がほぼ同数になります。しかし、加速器を用いた実験などで不安定な原子核も合成できます。これらの、より不安定な原子核のうち、特に中性子の数が陽子の数よりかなり多い原子核のことを中性子過剰核と呼びます。このような中性子過剰核の性質を知ることが、宇宙における元素合成を理解するために不可欠であるため、近年盛んに研究がなされています。

それら中性子過剰核のうち、いくつかの原子核はそのサイズが異常に大きく、中性子が原子核からかなり遠方まで染み出しているということが分かっています。中性子が原子核外まで染み出してぼやーっと広い領域に分布している様子などから「ハロー」と呼ばれます。このハロー核は、中心核に中性子が弱く結びついている結果、空間的に広がった中性子のハローが発生していると考えられます。実際、いくつかのハロー核ではこの描像が正しく「中心核+中性子」の 2 体系と近似的に見なせます。そして弱く結びついている、ということは大きな散乱長で相互作用をしたユニタリー極限に近い系だと思えるわけです。図 21 に、ハロー核と思われる原子核の例を示します。特に、重陽子以外にも、 ^{11}Be 、 ^{19}C といった核は「中心核+中性子」として振舞います。

これらの「中心核+中性子」として振る舞う核に対して、さらに 1 つ中性子を追加した三重水素や ^{12}Be 、 ^{20}C といった核だとうなるか？中心核と中性子は大きな散乱長で相互作用をすることに加え、中性子間の散乱長も大きいので、これらの核は「中心核+中性子(↑スピン)+中性子(↓スピン)」の 3 粒子系が、大きな散乱長で相互作用をしていると見なしたくなります。そのような場合 Efimov 状態が現れるので、三重水素や ^{12}Be 、 ^{20}C は「中心核+中性子(↑スピン)+中性子(↓スピン)」の 3 体系が成す Efimov 状態なのでは？と思いたくなります。この予想は三重水素については正しい一方 (Sec. 5.3 参照)、 ^{12}Be と ^{20}C については注意が必要です。これらの核は、現状においてはハロー核ではなく、↑スピンと↓スピンの中性子がペアを組んで、中心核に強く束縛した核だと思われています。しかし Sec. 4.3 や Sec. 5.3 でも議論した通り、基底 Efimov 状態は比較的強く束縛され、そのサイズは $\langle R \rangle \sim b \sim$ 数 fm となるわけです。特に散乱長が正の場合は、Efimov 基底状態は束縛エネルギーが大きく、有限レンジ補正の効果を非常に強く受けます。従って、この強く束縛された核だと見なされている ^{12}Be や ^{20}C も、もしかしたら基底 Efimov 状態と見なして良いのかもしれない。

「中心核+中性子」が束縛しない系でも、「中心核+中性子(↑スピン)+中性子(↓スピン)」の

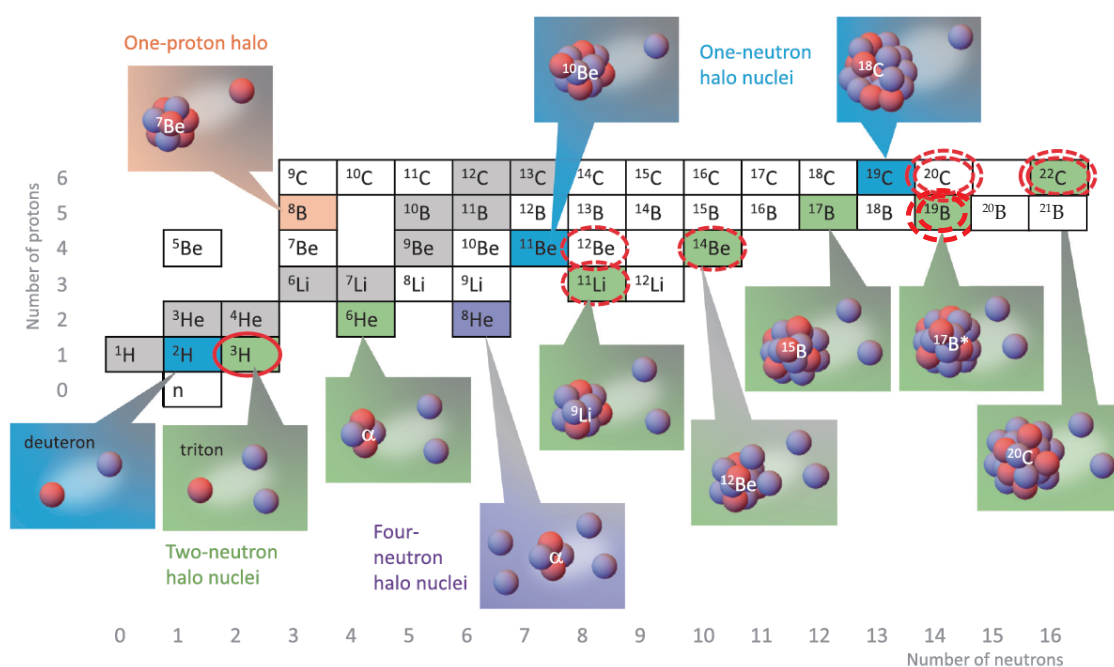


図 21: 安定核 (灰色) と観測されているハロー核を示した核図表。1 陽子ハロー (橙色)、1 中性子ハロー (青色)、2 中性子ハロー (緑色)、4 中性子ハロー (紫色) をそれぞれ色分けして示す。それぞれのハロー核について、その構造を示す概略図を併記している (赤丸が陽子、青丸が中性子)。核図表中に赤丸で Efimov 基底状態が現れうるハロー核、二重丸で Efimov 基底状態と励起状態がともに現れうるハロー核を示す。これらは原子核において Efimov 状態を示す候補だが、未確定なため破線で示しているが、三重水素については Efimov 基底状態と見なせると分かっているため実線で示す。[15] より編集。

3 粒子が束縛する可能性も考えられます。そのような 2 中性子ハロー核として、 ${}^6\text{He}$ 、 ${}^{11}\text{Li}$ 、 ${}^{14}\text{Be}$ 、 ${}^{17}\text{B}$ 、 ${}^{19}\text{B}$ 、 ${}^{22}\text{C}$ などが知られています。これらの系がもし Efimov 状態なのであれば、「中心核 + 中性子」系が束縛していないため、これらの系では負の散乱長、すなわちボロミアンな領域での Efimov 状態だ、というわけです。これらのうち、 ${}^{11}\text{Li}$ 、 ${}^{14}\text{Be}$ 、 ${}^{19}\text{B}$ 、 ${}^{22}\text{C}$ などを Efimov 基底状態と見なすことが可能で、そのような理論研究がなされています [6, 100, 101, 102, 103]。一方、 ${}^6\text{He}$ については注意が必要です。 α 粒子と中性子の s 波散乱長は大きいのですが、それと同時に p 波の相互作用も非常に大きくなっています。そのため、s 波相互作用のみを考慮する通常の Efimov 理論では記述できず、p 波相互作用も含めた理論的な記述が必要になります [104]。 ${}^{11}\text{Li}$ についても p 波散乱が定量的には無視できないことも指摘されています [100]。

これらのハロー核を基底 Efimov 状態と見なせる場合には、基底 Efimov 状態が束縛エネルギーが大きく、有限レンジ補正の効果や s 波以外の相互作用などが強く効く可能性がありため、単純な Efimov 状態との比較が容易ではありません。もしハロー核で 3 粒子束縛状態が 2 つ以上現れてくれば、それらの間に離散スケール不変性があるかどうかをより直接的に検証できるわけです。さらに、励起状態は基底 Efimov 状態に比べて束縛エネルギーが非常に小さいため、有限レンジ補正の効果や s 波以外の相互作用などが無視でき、ゼロレンジ Efimov 理論との直接比較が

容易になります。もし中心核と中性子間の相互作用がすべて散乱長が無人大だと仮定したゼロレンジ模型では、このような「重い+軽い+軽い」の3粒子系における Efimov 状態のスケール因子は15くらいになります(図14参照)。同種3ボソン系のスケール因子22.7よりは小さいので、原子核-中性子間の散乱長が十分に大きければ、励起 Efimov 状態も現れても不思議ではありません。

しかし残念ながら、このような励起 Efimov 状態も現れると期待できる候補は現状では非常に少なく、有力候補は ^{19}B と ^{20}C のみです[105, 106]。 ^{22}C も可能性はありますが、最近の実験データなどにより、励起 Efimov 状態が現れる可能性は低いだろうということが分かっています[107]。 ^{19}B については、 ^{17}B と中性子の間のs波散乱長が非常に大きいということが最近の実験でも観測されており[108]、 ^{19}B が原子核系で初めて励起 Efimov 状態を観測する最有力候補だと現状では言えると思われます。特にBについては、2018年に ^{20}B や ^{21}B が初めて観測されており[109]、B原子核について今後さらに研究が進展していくものと期待できます。

ハロー核には、陽子が原子核から大きく染み出した「陽子ハロー」も存在します。 ^8B がその一例です。この陽子ハローでは、Coulomb 相互作用が陽子と中心核の間に働くため、Sec. 5.4でも議論した通り Efimov 状態が現れにくくなります。散乱長が桁違いに大きな系であれば、そのような Coulomb 相互作用がある場合でも Efimov 状態が出現することもあり得ますが、現状ではそのようなことが起こる有力候補のハロー陽子核は知られていません。

5.6 磁性体

これまで、原子や原子核などの系での Efimov 状態に関する解説をしてきました。しかし実は、固体中の電子系においても Efimov 状態が現れることが分かってきています。そもそも Efimov 状態は散乱長が大きな低エネルギー系でユニバーサルに現れる少数多体現象なので、固体中の電子系において現れてもおかしくないわけです。ただし、Sec. 5.4でも解説した通り、Coulomb 相互作用が存在する系では Efimov 状態の出現が抑制されるため、長距離的な Coulomb 相互作用があまり働かない方が望ましいと考えられます。固体中の電子間には Coulomb 相互が働くのですが、多数の電子による遮蔽効果があるため、有効相互作用として短距離型の相互作用が出現することがよくあります。実際、強相関電子物性研究に用いられる典型的な模型である Hubbard 模型や量子スピン系の典型的なモデルである Heisenberg 模型では、まさにそのような短距離型の相互作用を考えます。特に Heisenberg 模型においては、強磁性相が現れるような低温領域において、電子のスピンたちが起こす集団励起としてマグノンと呼ばれる素励起が存在します。この素励起は、ボース統計に従い、低エネルギーで $\varepsilon \propto k^2$ と振舞う点で、ボース粒子が自由空間を飛び回る様子と酷似しています。この類似性を利用し、西田らは Heisenberg 模型において、このマグノン3つが Efimov 状態を発現させることを理論的に示しました[110]。等方的な Heisenberg 模型ではマグノン間相互作用はなく、マグノンらは自由粒子として振舞うのですが、固体中の結晶場の効果や非等方性による異方性によりマグノン間に相互作用が発生します。この相互作用の強さが、マグノン間のs波散乱長を発散的に大きくするパラメータ領域において、マグノンの3体問題を数値的に解くと、Efimov 状態が現れるということが示されました。そのスケール不変因子は「22.7」であり、Efimov 状態のスケール因子と一致することが示され、Efimov 状態が原子、原子核、固体物性にわたって普遍的に現れるということが改めて明らかになったのです。

これまでは原子・核子・ α 粒子などの「ちゃんとした粒子」が Efimov 効果を起こすということが知られていましたが、量子多体問題において現れる「素励起」も Efimov 効果を起こしうることが明らかになったことも注目すべき点です。このことには、Heisenberg 模型においては、マグノンの数が良い量子数であることも重要な役割と果たしています。もし良い量子数でなければ、マグノンが生成・消滅を繰り返し、「マグノン 3 体問題」を「1 体問題」「2 体問題」や「4 体問題」「5 体問題」などと合わせて考える必要があり、Efimov 状態の「3 粒子束縛状態」という描像が破綻するからです。そのように生成・消滅を繰り返すような「素励起」たちが大きな散乱長で相互作用する場合何が起きるか？という問題も、今後研究が進んでいくのでは期待されます。また、固体物性において Efimov 現象や類似した離散スケール不変な現象を観測しようという試みも行われ始めており [111, 112, 113]、「Efimov 状態」を異なる階層・分野の現象を統一的に理解することに用いるような研究も進んでいます。

5.7 Dynamical Efimov expansion

ここまで主にエネルギー固有状態・定常状態としての Efimov 状態を主に紹介してきましたが、Efimov 状態と類似のスケール不変現象をダイナミクスとして観測した Dynamical Efimov expansion と呼ばれる面白い研究があります [114, 115]。原子気体の実験をする際には、光や磁場によって原子たちを捕捉しています。この捕捉ポテンシャルは、調和振動子型だと良い近似でみなせるため、原子気体の時間発展のダイナミクスは、時間依存 Schrödinger 方程式

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = \sum_i \left(-\frac{\nabla_i^2}{2m} + \frac{m\omega^2(t)r_i^2}{2} \right) \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) \quad (152)$$

で記述されます。ここではまず簡単のため原子間相互作用を無視しますが、相互作用の効果は後で考察します。Efimov 状態の離散スケール不変性の起源を思い出すと、式 (84) の Schrödinger 方程式が、 $R \rightarrow \Lambda R$, $E \rightarrow \Lambda^{-2}E$ のスケール変換に対してスケール不変な形をしていることでした。このことから、上の時間依存 Schrödinger 方程式もスケール不変であれば、Efimov 状態と類似の離散スケール不変なダイナミクスが現れるだろうと期待できます。実際、式 (152) が $\mathbf{r}_i \rightarrow \Lambda \mathbf{r}_i$ に対してスケール不変であるための条件を考えると、 $t \rightarrow \Lambda^2 t$, $\omega(t) \rightarrow \Lambda^{-2}\omega(t)$ を満たせば、両辺がそれぞれ $i\partial_t \rightarrow \Lambda^{-2}i\partial_t$, $H \rightarrow \Lambda^{-2}H$ とスケールして、スケール不変性を満たすことが分かります。いま、調和型のトラップの強さや形状を特徴づける $\omega(t)$ は光や磁場の強さなどを制御することができます。この周波数が

$$\omega(t) = \frac{\lambda}{t} \quad (153)$$

のような時間依存性を持つように光や磁場の強さを制御すれば、式 (152) はスケール不変な形になります。そのような場合に、この Schrödinger 方程式は解析的に解け、時間の対数 $\log t$ について周期的に振動する解が現れます。この時間発展についての周期振動は、まさに Efimov 状態における hyper-radial 波動関数 (式 (87) 参照) の $\log R$ に関する周期振動に対応しています。Efimov 状態においては式 (84) の hyper-radial ポテンシャルの強さ s^2 がエネルギーに対するスケール因子 $\exp(2\pi/|s|)$ を特徴づけていましたが、Dynamical Efimov expansion においては λ がそれに相当し、 $\exp(2\pi/\sqrt{\lambda-1/4})$ というスケール因子に対してスケール不変なダイナミクスが現れます。

この現象の本質は Schrödinger 方程式のスケール不変性です。式 (152) では原子間相互作用のない系に時間発展を考えましたが、原子間相互作用を特徴づける s 波散乱長が発散するユニタリー極限では、原子間相互作用項もスケール不変になるため、全く同様のスケール不変なダイナミクスが現れます。そのような、相互作用の無い原子気体とユニタリー相互作用する原子気体のスケール不変なダイナミクスが冷却原子気体の実験において観測されました [114]。

この Dynamical Efimov expansion は、3 粒子現象とは一見全く異なるものなのですが、方程式が数理的に等価だということを利用し、次のようなことを行えるという長所があります：(i)Efimov 状態の波動関数が実空間で周期振動する様子を直接観測することは困難な一方 (Sec. 5.2 参照)、その振動する様子を Dynamical Efimov expansion では明瞭に見える。(ii)Efimov 状態のスケール因子は質量や粒子の統計性で一意に決まるため自在に制御することが困難な一方 (図 14 参照)、Dynamical Efimov expansion では光や磁場の強さで自在に制御できる。特に長所 (ii) を活用し、冷却原子では観測できないくらいスケール因子が大きなスーパー Efimov 状態と呼ばれる現象を Dynamical Efimov expansion 実験で観測することに成功しています [115]。このような実験は、自然界では実現できないだろうと思われるような現象を実現して詳細に観測するという、冷却原子の量子シミュレータとしての優れた特長をまさに最大限活用した実験だと言えます。

6 Efimov 状態を超えて

散乱長が大きな 3 体系においては、様々な系で普遍的に Efimov 状態が発現することを見てきました。では 4 粒子、5 粒子、6 粒子ではどうなるのでしょうか？そしてさらに粒子数を増やしていったら、どのように粒子数無限大の熱力学極限になっていくのでしょうか？これらの研究についてこの節では紹介していきます。また、Efimov 状態とは異なるスケール不変性を示すユニバーサルな 3 体、4 体、5 体状態も最近では発見されており、Efimov 状態はいくつもあるユニバーサルな少数状態の 1 つであることも分かってきています。これらのことについて、最近の研究も含めて紹介していきます。これらの研究は現在も活発に研究が続いており、もともとは量子 3 体問題の特異な現象であった Efimov 状態が、量子少数多体系の示すユニバーサルな現象というより広い枠組みで様々な物理系での量子現象を理解することにつながっています。

6.1 4 体、5 体、6 体.....

4 粒子状態 4 粒子以上の系においても、3 粒子の Efimov 状態と同様の離散スケール不変な束縛状態が現れるか？という疑問は、1970 年に Efimov 状態を発見した直後から研究がされてきました。特に 1973 年に Amado と Greenwood の「There Is No Efimov Effect for Four or More Particles」というタイトルの論文 [116] により、同種ボース粒子系においては、4 粒子以上の系で Efimov 効果が起こらないということが示されました。ここで「 N 粒子系での Efimov 効果 (N-body Efimov effect)」の定義は「 $N - 1$ 粒子が束縛状態を形成する引力相互作用 g_c より弱い引力相互作用 $|g| < |g_c|$ で N 粒子束縛状態が可算無限個現れ (ボロミアン状態)、それらが離散スケール不変な挙動を示す。」ということです。 $N = 3$ の時は、まさにこのようなことが起こっているのが Efimov 現象でした。

この Amado と Greenwood の研究から 4 体 Efimov 状態が現れないことが分かった一方、「4 体 Efimov 状態とは異なる、ユニバーサルな 4 体束縛状態は存在するか？」という問いは残りまし

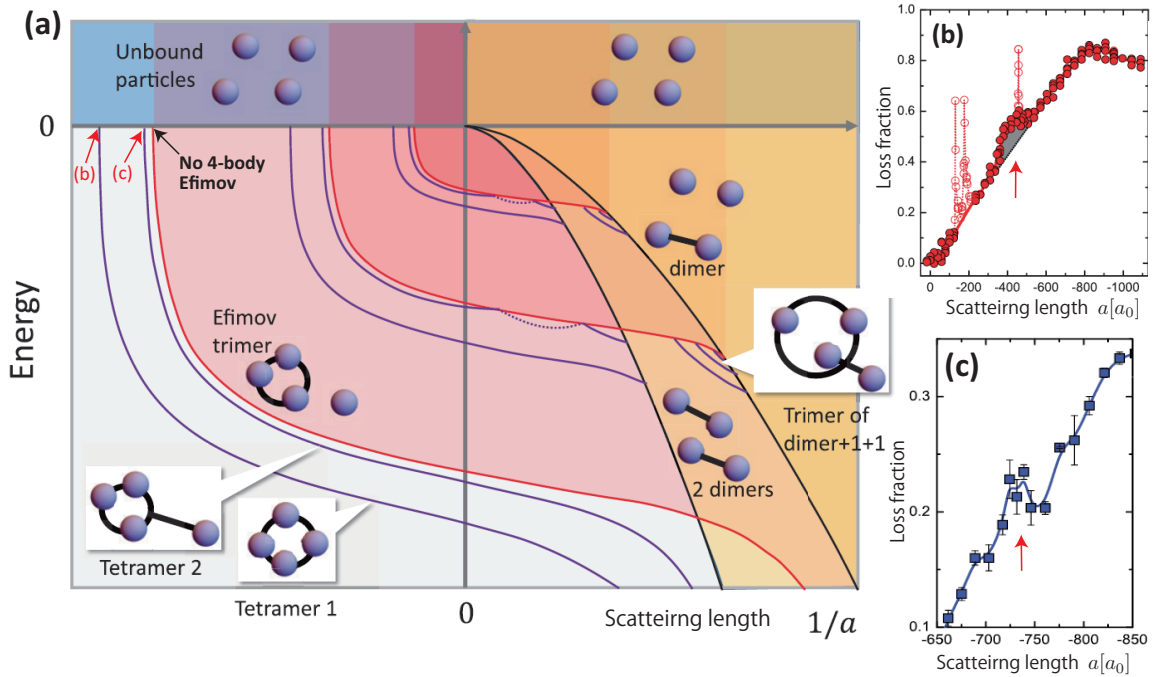


図 22: (a) ユニタリー極限付近での同種 4 粒子ボソンのエネルギースペクトル (角運動量とパリティは $L^\pi = 0^+$)。2 体、3 体、4 体状態のスペクトルをそれぞれ黒線、赤線、紫線で示す。それぞれの状態を表す模式図の併記してある。紫点線は 4 体バーチャル状態。(b)(c) 4 体状態の冷却原子実験による観測。散乱長を変化させた際に、原子のロスが増大することにより 2 つの 4 体状態が観測された。図 (a) 中の赤矢印で示した位置が、それぞれ図 (b)(c) 内の赤矢印に相当。図 (a),(b)(c) はそれぞれ、[15] と [122] より引用。

た。この問いに答えるため、大きな散乱長で相互作用するボース 4 体問題に関する多くの理論研究が行われました [117, 118, 119, 120, 121]。これらの研究により、4 粒子ボース系においてはユニバーサルな 4 体束縛状態が存在し、図 22(a) のように振る舞いそうだという結論に達しつつあります。各 Efimov 状態（赤線）に付随して、4 粒子状態が 2 つずつ現れます（紫線。「Tetramer 1」「Tetramer 2」）[117, 118, 119]。両者とも負の散乱長領域で現れ、散乱長を正の方へと変えていくと、最終的に dimer+dimer へと分解していきます。Tetramer 1 は束縛エネルギーが大きく、4 粒子ががっちり束縛した構造を持っている一方、Tetramer 2 の方は Efimov trimer のエネルギーの直下に現れ、非常に小さな束縛エネルギーを持っているため、「Efimov Trimer と 1 粒子が束縛状態を組む」ような構造になっています。これらの 4 体状態は Efimov 状態に付随しているため、 $e^{\pi/|s_0|}$ のスケール変換により、励起 Efimov 状態に付随した 4 体状態と関係づきます。そのような意味で離散スケール不変性は示すのですが、これらは「4 体 Efimov 状態」ではありません。「4 体 Efimov 状態」とは、3 粒子束縛状態が現れ始める threshold(図 22(a) の「No 4-body Efimov」と記した点)の近傍に 4 体束縛状態が無数個現れて、それらが離散スケール不変性を示すことを指し、そのような現象は起きません。この違いには注意が必要です。

基底 Efimov 状態に付随した 2 つの Tetramer と励起 Efimov 状態に付随した 4 体状態は、いくつかの異なる性質を示します。前者は束縛状態である一方、励起 Efimov 状態に付随した 4 体状態は

「3 体束縛状態 + 1 粒子」の連続スペクトル (赤領域) の中にあるため、これらは有限寿命をもった共鳴状態として現れます。また、励起 Efimov 状態に付随した 4 体状態のうち、エネルギーの高い「Tetramer 2」の方は、正の散乱長領域で散乱長を変化させると「Trimer + particle」に分解してバーチャル状態になり、また「Tetramer 2」として再び現れる、という特異な振舞をします。なぜこのような挙動をするのか明確には分かっていませんが、連続状態の効果や寿命も正確に取り込んだ高精度の量子 4 体計算をすることではじめてこのような興味深い振舞をすることが明らかになりました [121]。

これらの 4 体状態のうち、基底 Efimov 状態に付随した 4 体束縛状態 2 つが、冷却原子気体の実験で観測されました [122]。図 22(b), (c) に示すように、散乱長を変化せた際に原子のロスが理論的に予言される位置において増大することが観測されました。一方、励起 Efimov 状態に付随した 4 体共鳴状態は未だに観測されていません。また、Efimov trimer 状態が dimer+particle に分解する近傍でも、4 体状態が存在することが理論的に予言されています [119, 123](図 22(a) の「Trimer of dimer +1+1」)。これも未だ観測されていません。この 4 体状態は、dimer と particle の間の s 波散乱長がこの近傍で発散的に大きくなり、「dimer と particle と particle」の 3 粒子が Efimov 状態を形成するような状態です。質量比が 2 なので、スケール因子は 22.7 と異なる値になります (図 14 参照)。このように、Dimer や Trimer が複合粒子となり、それらが少数多体状態の形成に寄与していくことが、4 体以上の少数多体現象の非常に興味深い点でもあります。

5 粒子, 6 粒子.... 状態 5 粒子以上関する研究も進んでおり、現状において図 23(a) のようなエネルギー Spektrum が現れるということがこれまでの理論計算 [124, 125, 126, 127] により分かっています。5 体、6 体、7 体... と N 体状態がどんどん現れることが分かっています。そしてこれらの N 体クラスター状態が、それぞれの Efimov 状態に付随して現れそうだとすることも分かっています。このように粒子数を上げると「Trimer + Dimer」に 5 体状態が分解したりなども起こり、全体的にエネルギー Spektrum が複雑化していきます。また図 23(a) には記されていませんが、dimer や trimer が複合粒子となった結果現れる「dimer+dimer+particle」「dimer+dimer+dimer」「trimer+particle+particle」の Efimov 状態なども現れるかもしれません。

これらの 5 体以上の状態は、ほとんどが実験で観測されていません。唯一観測されたのは 5 体束縛状態の基底状態です [128]。5 体束縛状態が負の散乱長領域で 5 原子に分解する付近 (図 23(a) 赤矢印) で、図 23(b) のように原子のロスレートが増大することを観測することで、この 5 体束縛状態が観測されました。この 5 体束縛状態 (i.e. 5 体衝突) によるロスレートの増大は、3 体、4 体束縛状態 (i.e. 3 体・4 体衝突) による原子ロスの寄与よりも遥かに小さいため、非常に高精度の実験技術が要求されます。6 粒子、7 粒子状態の観測となると、さらなる実験技術が要求され、5 体以上の N 体状態を冷却原子実験において観測することは容易ではありません。

6.2 量子少数系と多体系のつながり

前節の 4 粒子、5 粒子、6 粒子... と粒子数を増やした際の量子少数系を採る研究は、実験的に検証することが困難な一方、「粒子数を 1 つ 1 つ増やしていった際に、どのように量子多体系の熱力学極限的な振舞いに達するのか？」という本質的な問いに関連しています。この問いに答えるために行われている、いくつかの最近の興味深い進展・研究をこの節では紹介していきます。

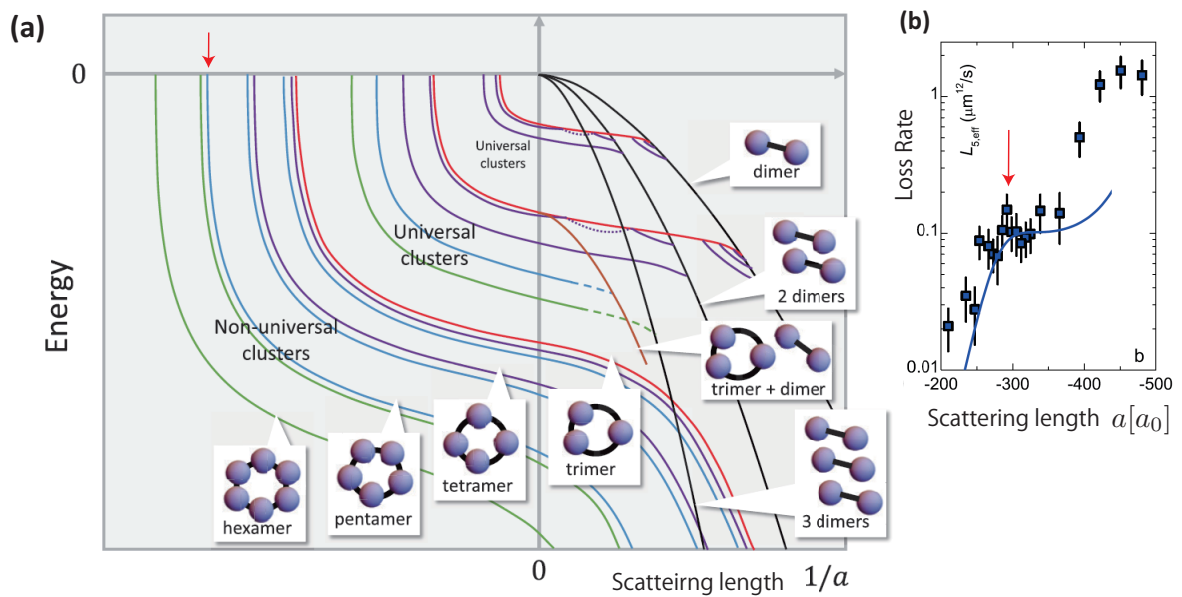


図 23: (a) ユニタリー極限付近での N 粒子ボソンのエネルギースペクトル (角運動量とパリティは $L^\pi = 0^+$)。2 体、3 体、4 体、5 体、6 体状態のスペクトルをそれぞれ黒線、赤線、紫線、青線、緑線で示す。それぞれの状態を表す模式図の併記してある。紫点線は 4 体バーチャル状態。(b)(c) 4 体状態の冷却原子実験による観測。散乱長を変化させた際に、原子のロスが増大することにより 2 つの 4 体状態が観測された。図 (a) 中の赤矢印で示した位置が、図 (b) の赤矢印での散乱長に相当。図 (a),(b) はそれぞれ、[15] と [128] より引用。

少数系から多体系へ N 粒子ボース系の基底状態のエネルギーが、粒子数を増やしていくとどうなるかなどを調べる研究がおこなわれています。それらの研究の結果を 1 つのグラフにまとめたものを図 24 に示します。粒子間相互作用の形状等による多少の違いはあるものの、全体的な傾向として、粒子数が少ない場合は $E \propto N^2$ のように振る舞います。この領域では、全ての粒子が互いに相互作用しており、その相互作用によるエネルギーが $E \propto N(N-1)/2$ のように振る舞っていると理解できます。一方、粒子数が大きな領域では $E \propto N$ のように振る舞うように見えます。この領域では、系のサイズが大きくなったことにより、1 つの粒子がそのまわりにいる数粒子とは相互作用できるが、遠方にある粒子との相互作用は媒質の効果により遮蔽されてしまう、という状況になっていると理解できます。このように粒子数を増やしていった際に、 $E \propto N^2$ という少数系的な挙動から $E \propto N$ という熱力学的な挙動へと連続的に変化していく、ということが分かっています。その境界である粒子数が $N = 6 - 10$ 程度であるということも、幾何学的に考えれば理解できます：3 次元空間において、1 つの球の周りにどんどん他の球を配置する問題を考えてみましょう。その 1 つの球の周りの上下左右に球が配置されるには $N = 6$ 個くらい球あればよいだろう、と思えます。一方、球体を最密充填並べることを考えた場合、1 つの球の周りには 12 個の球が隣接します。そのような状況になれば、中心にいる 1 つの球は「他の球が形成する媒質内にいる」と見なすことができます。

この物理的描像は、量子的な挙動や表面での粒子の振舞いを無視した非常に単純なものである一方、1 つの知見を与えてくれます：1 次元系や 2 次元系といった低次元の系では、少数系から多

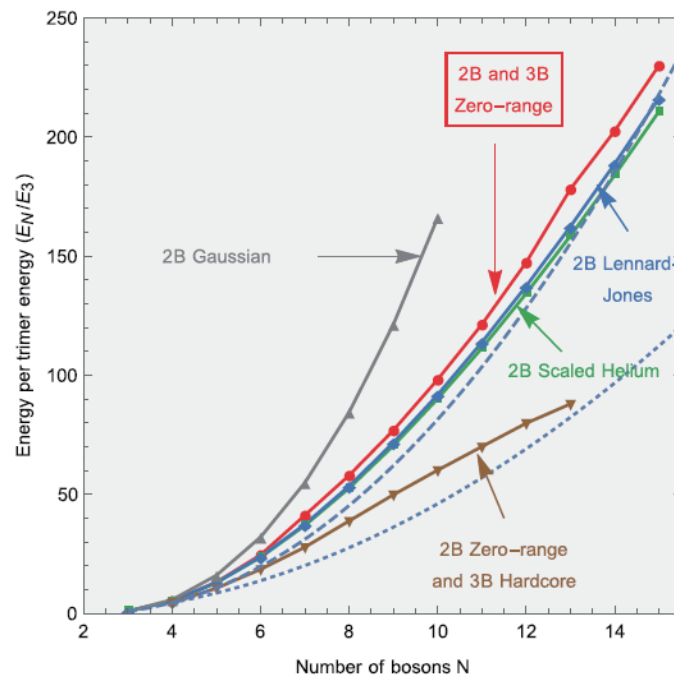


図 24: 理論計算 [124, 125, 126, 127] によって得られた、ユニタリー極限における N 粒子ボソン系の基底状態の束縛エネルギー。2 体相互作用のみによるもの: Gaussian 相互作用 (灰実線)、He 型相互作用 (緑実線)、Lenard-Jones 型相互作用 (青実線)。2 体相互作用 + 3 体相互作用によるもの: 2 体と 3 体相互作用のゼロレンジ相互作用 (赤実線)、2 体ゼロレンジと 3 体ハードコア相互作用 (茶実線)。青点線 [129] と青破線 [126] は、これら量子少数系計算結果から類推された、 N 粒子系のエネルギーの解析的な予言式。(図は [15] より引用。)

体系へと振舞いに変化していく臨界粒子数が、3次元系よりも小さいだろう、ということです。本講義では3次元系のみを扱いましたが、1次元、2次元系における量子少数多体系の研究もかなり進展しています。実は、Efimov 状態は1次元や2次元系では現れず、3次元系特有の現象である、ということが分かっています [13, 130, 131]。さらに、1次元や2次元系ではEfimov 状態は現れないものの、Efimov 状態と異なる性質を持つユニバーサルな3粒子束縛状態 [130, 132, 133, 134] が存在するということが分かっています。このような次元・粒子数を変えていった際に、どのような量子少数多体状態が現れるかを探る研究も進展しています。

多体問題における3体相関 Efimov 状態などの量子3体問題の研究は、量子多体問題に応用することも可能です。特に、強く相互作用する量子多体系における3体相関を正確に理解することに量子3体問題研究が使えるだろうと期待できます。そのような研究が急速に発展しています。いくつかの具体例を以下に列挙します：

- 3粒子、4粒子の正確なエネルギー・固有状態を利用した、高精度な状態方程式や N 体波動関数の性質の研究 [135]。高温で有効なビリアル展開 [136, 137] や、低温で有効な変分波動関数の方法 [138, 139, 140] などが試みられている。

- 3 粒子束縛状態が形成され、それらが基本構成要素となった Trimer 量子相の研究 [141, 142]。
- Efimov 状態由来の強い 3 体相関をもった量子多体相の研究 [143, 144, 145]

これらの研究が進展することにより、従来は別々に行われることが多かった量子少数系と量子多体系を統一的に理解することにつながっていくことが期待されます。

6.3 フェルミ粒子系における Efimov 状態や、Efimov 状態と異なるユニバーサル状態

Sec. 4.1 でも紹介した通り、フェルミ粒子系で排他律による斥力がある 3 体系は、質量比によってその挙動が大きく変化します。散乱長が無限 $1/a = 0$ のユニタリー極限では、質量比 M/m が大きな場合 $M/m > 13.606$ には可算無限個の 3 粒子束縛状態が Efimov 状態として現れる一方、質量比 M/m が小さな場合 $M/m < 13.606$ では hyper-radial ポテンシャルが斥力になり、3 粒子束縛状態が現れません。従って質量比 13.606 を境に、3 粒子束縛状態の数が「0 個」から「無限個」になるわけです。このような突然の変化が起こるのは非常に奇妙だと一見思えますが、これは $1/a = 0$ のユニタリー極限を考えたことに由来しています。実際の物理系は、散乱長はどんなに大きくなったとしても有限なため、「大きい有限値の散乱長」で 3 体系に何が起こるかということに対して、もう少し丁寧な考察が必要だということになります。

この「大きい有限値の散乱長」の 3 体系を考えることで、2007 年に Kartavtsev と Malykh が新しいタイプの 3 粒子束縛状態を発見しました [146]⁴²。2 フェルミ粒子+1 粒子系が、大きいけれども有限の s 波散乱長で相互作用する際の 3 粒子間の hyper-radial ポテンシャルを図 25 に示します。質量比が小さな $M/m \leq 8$ では hyper-radial ポテンシャルは斥力的で 3 粒子束縛状態は現れず、質量比が大きな $M/m > 13.606$ の場合 (破線)、引力的になり Efimov 状態が現れます。その中間である $8 \leq M/m \leq 13.606\dots$ において、hyper-radial ポテンシャルが興味深い形をしています。近距離では強い斥力が働く一方、 $R \sim a$ の領域では引力的になります。この奇妙な形状は、Pauli 排他律による斥力と媒介相互作用による引力の競合の結果生じたものです。このポテンシャルは $R \sim 0.1 - 1.0a$ 付近にポテンシャルの極小が現れます。Kartavtsev と Malykh は、このポテンシャルの極小付近に束縛状態が現れるということを発見しました。チャンネル結合も考慮した正確な 3 体計算を行い、 $8.17260\dots \leq M/m \leq 12.91743\dots$ ではそのような 3 粒子束縛状態が 1 つ、 $12.91743\dots \leq M/m \leq 13.606\dots$ では 2 つ現れることを発見しました。

Efimov 状態とは異なるユニバーサルな 3 粒子束縛状態 この 3 粒子束縛状態は、Efimov 状態とは全く異なる、以下のような性質を持ちます：

(i) 散乱長が正で大きな場合のみ現れる

$a > 0$ では図 25 のようにポテンシャル極小が現れるのに対し、 $a < 0$ では hyper-radial ポテンシャルにそのような極小は現れません。その結果、Kartavtsev と Malykh の 3 粒子束縛状態は、 $a > 0$ でのみ現れます。これは Efimov 状態が $a < 0$ の領域でも現れ、ボロミアン状態として振舞うことと対照的です。

(ii) 3 粒子束縛状態のサイズは $\langle R \rangle \sim a$ 程度

Kartavtsev と Malykh の発見した 3 粒子束縛状態のサイズはポテンシャル極小の位置で決まり、

⁴² この Kartavtsev と Malykh をはじめ、Efimov, Faddeev, Skorniakov, Ter-Martirosian らの量子少数多体問題の発展にロシア系の研究者が多いというのにも興味深いことです。

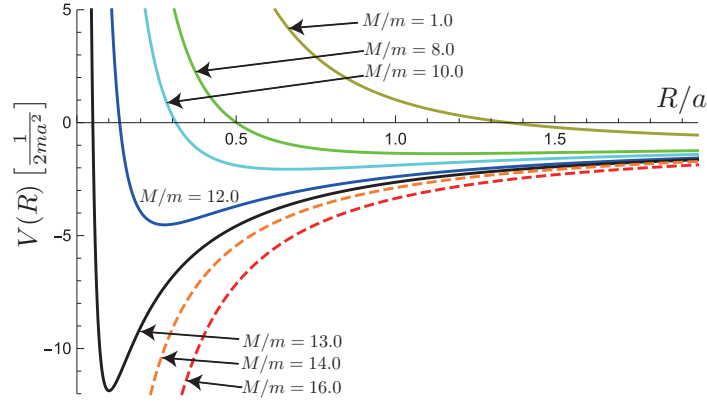


図 25: 2 identical fermion + 1 粒子系における、3 粒子間の hyper-radial ポテンシャル ($L^{\pi} = 1^{-}$)。散乱長が正で非常に大きい $a \gg b, a > 0$ という条件の下で、ゼロレンジ相互作用の下で求めた。Efimov 状態が現れない場合 $M/m < 13.606\dots$ での hyper-radial ポテンシャルを実線、Efimov 状態が現れる場合 $M/m > 13.606\dots$ を破線で示す。

$\langle R \rangle \sim a$ 程度です。特に s 波散乱長 a が大きな領域では、3 粒子束縛状態が非常に大きなサイズになります。これは Efimov 状態のサイズが 3 体パラメータで決まり、特に基底状態のサイズが相互作用の到達距離程度 $\langle R \rangle \sim b$ であったことと対照的です。

(iii) 散乱長 a のみで、ユニバーサルに記述できる。

図 25 に示す通り、 $M/m < 13.606\dots$ では hyper-radial ポテンシャルが短距離で非常に強い斥力を示します。このことは、3 粒子の波動関数が短距離で指数的に減衰することを意味します。そのため、2 体相互作用や 3 体相互作用が短距離でどんなに複雑であったとしても、3 粒子が近づくことができず、散乱長 a のみでこの 3 粒子束縛状態がユニバーサルに記述できるのです。実際、3 粒子束縛状態のサイズや束縛エネルギーは $\langle R \rangle \propto a, E \propto a^{-2}$ のように振る舞います。このような性質から、この Kartavtsev と Malykh の発見した 3 粒子束縛状態は「ユニバーサル状態 (Universal state)」 「ユニバーサル 3 量体 (Universal trimer)」 などとも呼ばれます⁴³。このように散乱長という 1 つのパラメータだけでユニバーサルに記述できることは、Efimov 状態が散乱長と 3 体パラメータ (a, Λ) という 2 つのパラメータでユニバーサルに記述できる様子と対照的です⁴⁴。3 粒子系であるにもかかわらず、3 粒子が接近した際の散乱位相シフトの情報である 3 体パラメータ Λ に依存せず、2 体散乱の情報である散乱長 a のみで記述されるというのがユニバーサル状態の特徴的な性質です。その起源にはフェルミ粒子の排他律が効いており、フェルミ系特有の 3 体現象だと言えます。

(iv) 連続スケール不変性を示す

散乱長を $a \rightarrow \lambda a$ とスケール変換した場合、ユニバーサル状態の波動関数やエネルギーは $\Psi(\mathbf{r}) \rightarrow \Psi(\lambda \mathbf{r}), E \rightarrow \lambda^{-2} E$ とスケール変換されます。この変換が任意の正の実数 λ に対して成立するとい

⁴³ 発見した Kartavtsev と Malykh に敬意を表して「Kartavtsev-Malykh 状態」「Kartavtsev-Malykh trimer」と呼ぶ場合もあります。

⁴⁴ この Kartavtsev と Malykh のユニバーサル状態の性質は、むしろ散乱長が大きな領域での 2 粒子束縛状態の挙動と類似しています。実際、散乱長が大きな領域の $a > 0$ でのみ 2 体束縛状態が存在し、そのサイズやエネルギーは $\langle R \rangle \propto a, E \propto a^{-2}$ のように振る舞います。

う意味で⁴⁵、ユニバーサル状態は連続スケール不変性を示します。これは Efimov 状態が離散スケール不変性を示すことと対称的です。

ユニバーサル状態と Efimov 状態の間のクロスオーバー Kartavtsev-Malykh らが発見した、質量比が中程度 $8.17... < M/m < 13.606...$ で現れるユニバーサル状態と、質量比が大きな領域 $M/m > 13.606...$ で現れる Efimov 状態は、上記のように大きく異なる性質を持っています。では質量比や散乱長を徐々に変化させた場合、3 粒子系はどのように振舞うのでしょうか？そしてユニバーサル状態と Efimov 状態はどのような場合に現れるのでしょうか？

この問いに対する答えを図 26 に示します。これは散乱長や質量比を変えながら量子 3 体問題を正確に解いた結果得られた概略図です [147]。 $M/m > 8.172...$ において、散乱長が大きな領域では 3 粒子束縛状態が $a > 0$ で現れて、 $E \propto a^{-2}$ とユニバーサル状態特有の挙動をします。しかし、散乱長を小さくしていき、ユニタリー極限から外れていくにつれて、 $E \propto a^{-2}$ の挙動からずれていきます。その領域 (図 26 の緑。Crossover と表記) では、ユニバーサル状態の $E \propto a^{-2}$ や連続スケール不変性は示さないのですが、実は散乱長と 3 体パラメータ (a, Λ) でユニバーサルに記述できる領域になっていることが分かっています。そしてさらに散乱長を小さくしていくと、2 粒子束縛状態 (dimer と表記) のスペクトルとぶつかり、3 粒子束縛状態が dimer+particle へと分解してしまいます。

質量比を大きくしていくと、3 粒子束縛状態がユニバーサル状態として振舞う領域が減少していき、クロスオーバー状態として振舞う領域が広がっていきます。そして、特に Efimov 状態が現れる臨界質量比 $13.6069...$ ではユニバーサル状態が消失し、クロスオーバー状態のみになります。このことは図 25 を見れば理解できます。ユニバーサル状態が散乱長のみでユニバーサルに記述できたのは、図 25 の短距離における斥力のおかげでした。質量比を徐々に増加させると、この短距離部分での斥力が徐々に弱くなってしまいます。すると、波動関数が短距離まで侵入できるようになります。従って、3 体パラメータ Λ により強い依存するようになり、 Λ にも依存するクロスオーバー状態になっていくのです。

質量比をさらに大きくして、 $M/m > 13.606...$ になると、元々ユニバーサル状態であった 2 つの 3 粒子束縛状態が、それぞれ基底 Efimov 状態と第一励起 Efimov 状態へととなります。 $a < 0$ でも存在できるボロミアン状態となり、さらに $M/m < 13.606...$ では存在しなかったと第二励起、第三励起..... 状態も出現し、Efimov 状態の離散スケール不変性をユニタリー極限付近で示します。一方 $a > 0$ の領域では、離散スケール不変性を示さないクロスオーバー状態が残っています。これは、臨界質量比 $M/m = 13.606...$ において、3 粒子束縛状態がクロスオーバー状態であった名残りで、質量比を増やしていくにつれて、Efimov 状態の領域が拡大し、クロスオーバー状態の領域が減少していきます。

このように、質量比や散乱長を変化させることで、フェルミ 3 体系は非常に興味深い挙動をします。この系では、質量比を変化させることで、ユニバーサル状態の連続スケール不変性から Efimov 状態の離散スケール不変性へと、対称性が破れていっている、とも見なせます。ただしこの変化は連続的なクロスオーバーとして起こります。というのは、少数系は多体系と異なり、不連続な相転移・臨界現象が許されないからです。クロスオーバー状態は、この 2 つの対称性が異なる量子少数状態を連続的につなぐために、必然的に現れている中間状態であるとも見なせるで

⁴⁵散乱長 a が相互作用の到達距離 b よりも十分大きいという条件下で

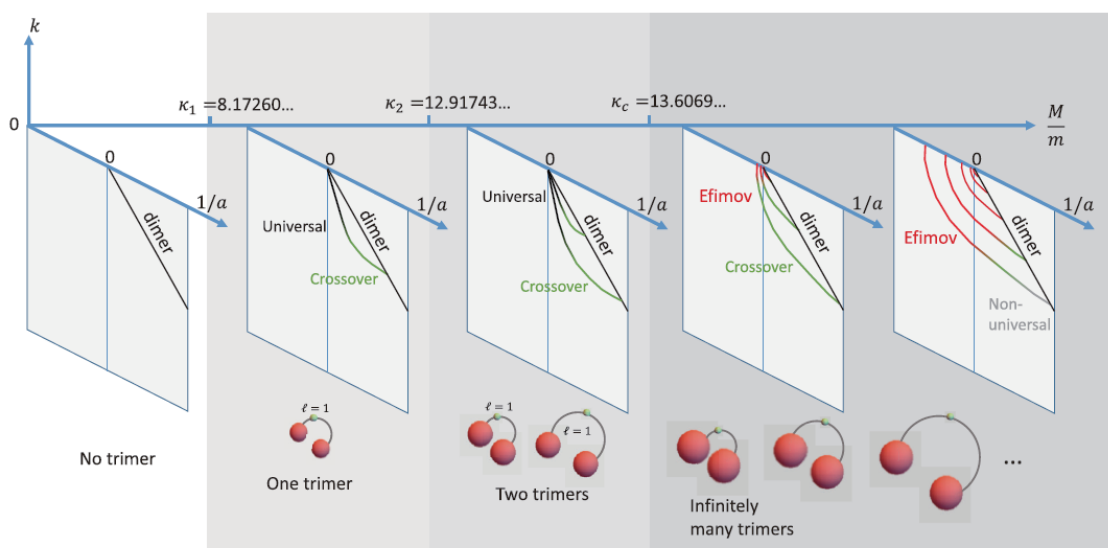


図 26: 2 identical fermion + 1 粒子系の、散乱長が大きな領域におけるユニバーサルな 3 粒子系のエネルギー Spektral の概略図。質量比が小さな領域では、2 粒子束縛状態 (黒線。dimer と表記) が散乱長が正の領域で現れる一方、3 粒子束縛状態は現れない。質量比を大きくしていくと、 $M/m > \kappa_1 = 8.17260\dots$ で 3 粒子束縛状態が正の散乱長領域で現れる。散乱長が非常に大きなユニタリー領域付近では、 $E \propto k^2 \propto a^{-2}$ とユニバーサル状態 (黒線) として振舞う一方、ユニタリー領域から外れるとその挙動と異なる振舞いをするクロスオーバー状態 (緑線) に変化し、最終的に dimer+ particle へと分解する。質量比をさらに大きくした $M/m > \kappa_2 = 12.91743\dots$ では、3 粒子束縛状態が 2 つ現れる。両者とも、散乱長が正の領域で現れ、ユニタリー領域付近では Universal trimer (黒線)、ユニタリー領域から外れるとその挙動と異なる振舞いをするクロスオーバー状態 (緑線) へと変化する。質量比をさらに大きくしていくと、このは Universal trimer 領域が小さくなり、クロスオーバー状態の領域が大きくなる。特に Efimov 状態が現れる臨界質量比 $\kappa_c = 13.6069\dots$ では Universal trimer が消失し、クロスオーバー状態のみになる。そして $M/m > \kappa_c$ において 3 粒子束縛状態が可算無限個現れる。これらは、 $M/m \geq \kappa_c$ では Efimov trimer として離散スケール不変に振舞う領域は小さいのだが、質量比を増やしていくにつれて、Efimov trimer として振舞う領域が拡大していく。なお、基底状態については、束縛エネルギーが大きな場合、Finite-range effects が大きい。その領域を Non-universal と表記。(図は [15] より引用。)

しょう。

ユニバーサル状態の観測 このフェルミ系におけるユニバーサル状態、Efimov 状態、それらをつなぐクロスオーバー状態は、未だ直接観測がされていません。これは質量比が 10 倍程度と大きなフェルミ粒子の混合系で、なおかつ s 波散乱長が大きな物理系を実現しないとイケないからです。冷却原子気体の実験においては、Yb 原子と Li 原子の混合気体 (質量比 30) が実現されており、このような系では Efimov 状態が散乱長が大きな領域で観測できるだろうと期待できます。

一方、ユニバーサル状態については、条件がさらに厳しくなります。特に質量比が $8.17\dots < M/m < 13.60\dots$ の系を実現しないとなります。現在、冷却原子で実験が行われている原子の組み合わせ

せでは ^{53}Cr 原子と ^6Li 原子の混合系 (質量比 8.8) がユニバーサル状態を観測しうるほぼ唯一の候補になります。この ^{53}Cr 原子と ^6Li 原子の混合気体は未だ実現していませんが、実現しようという実験が、まさに現在イタリアのグループで試みられています。

このように排他律のあるフェルミ系における 3 粒子束縛状態を直接観測することには未だ成功していませんが、間接的な観測には成功しています。図 26 に示す通り、ユニバーサル状態は散乱長を小さくしていくと、クロスオーバー状態となり、最終的に dimer+particle へと分解していきます。その分解する点付近で、dimer と particle の散乱が共鳴的に大きくなります [148, 149]。この dimer と particle の強い散乱を観測することで、ユニバーサル状態・クロスオーバー状態を観測することにインスブルック大学のグループが成功しています [150]。この dimer と particle の散乱共鳴は、s 波ではなく、p 波で起こることが、この現象の特徴です。これは、ユニバーサル状態が角運動量 $\ell = 1$ を持つ「回転している 3 粒子束縛状態」だからです。

このような間接的な証拠はあるものの、ユニバーサル状態、Efimov 状態、それらをつなぐクロスオーバー状態が冷却原子実験において、より明瞭に観測されることが待たれます。また、散乱長が大きく、かつ質量差があるフェルミ系であれば、どのような系であっても図 25 のような挙動をするため、原子核・ハドロン等の系でも類似・関連する現象がないか興味をもたれるところです。

4 体 Efimov 状態・ユニバーサル状態 排他律のあるフェルミ系において、3 粒子系ではユニバーサル状態や Efimov 状態、それらをつなぐクロスオーバー状態という興味深い現象が現れました。それでは 4 粒子系ではどのようなのでしょうか？4 粒子フェルミ系といった場合、「4 identical fermion」「3 identical fermion + 1 particle」「2 identical fermion + 2 identical fermion」などの系が考えられます。このうち「4 identical fermion」は s 波相互作用できないので、考えるべきは「3 identical fermion + 1 particle」と「2 identical fermion + 2 identical fermion」になります。

「3 identical fermion + 1 particle」系において、驚くべきことが発見されました [151]。Efimov trimer の状態が現れる質量比 13.606... より、ほんの少し小さな質量比 13.384 以上で、4 粒子の束縛状態が現れるのです。可算無限個の 4 体束縛状態が現れ、Efimov 状態同様、離散スケール不変性を示すのです。4 体ボース粒子系においては 4 体 Efimov 状態は起こらない (Sec. 6.1 参照) こととは対照的に、フェルミ 4 粒子系では 4 体 Efimov 状態が現れるのです。ただし、質量比が 13.384... 以上、13.606.. 以下という、とても狭い領域なので、なかなか観測は難しそうです。もっと観測し易い 4 体状態もあります。実は、4 体 Efimov 状態に付随して、「3 identical fermion + 1 particle」系では、Kartavtsev と Malykh の発見したユニバーサル状態と同じ性質をもつ 4 体束縛状態が質量比 8.8 以上で現れます [151, 152, 153]。これらの 4 体 Efimov 状態や 4 体ユニバーサル状態は、3 粒子系のものと全く同じような性質を示します。4 体ユニバーサル状態と 4 体 Efimov 状態の間にも図 26 と同様のクロスオーバー現象が現れることが予期されます。

一方、「2 identical fermion + 2 identical fermion」系においては、4 体 Efimov 状態もユニバーサル状態も現れないことも分かっています [154]。このような違いが現れる単純な理由としては、「3 identical fermion + 1 particle」系の方が重い粒子が多く、「2 identical fermion + 2 identical fermion」系に比べて束縛しやすい、ということが言えます。ただ、これらの 4 体現象は、2010 年以降に発見されたかなり新しい現象であり、定性的な理解もあまりすすんでおらず、まだまだ研究途上なことが多いです。これは、フェルミ粒子系の節がある波動関数に対して精密な量子 4 体計算を行

表 2: s 波散乱長の大きな、質量差のある 2 成分フェルミ粒子混合系において、これまでの理論研究で分かっている N 体ユニバーサル状態・ N 体 Efimov 状態の存在の可否。そして、その出現に必要な臨界質量比。

粒子数	ユニバーサル状態	臨界質量比	Efimov 状態	臨界質量比	文献
2+1	○	8.17	○	13.606	[146, 3, 66]
3+1	○	8.8	○	13.384	[151, 152, 153]
2+2	×	-	×	-	[154]
4+1	○	9.6	○	13.2	[153]
5+1	おそらく×	-	おそらく×	-	[153, 155]

うが必要があるというところに難しさがあることに起因しています。

5 体、6 体..... 状態 フェルミ粒子系の 5 粒子以上の系で Efimov 状態やユニバーサル状態があるか否かを探った理論研究が、2019 年現在 1 つだけあります [153, 155]。この研究によると、「4 identical fermion + 1 particle」系においては、5 体ユニバーサル状態も 5 体 Efimov 状態も現れます。その質量比は、それぞれ 9.6, 13.2 ということが、精密な量子 5 体計算により分かっています。この結果と、前節までに紹介した結果を表 2 にまとめます。

ここまで来ると、「5 identical fermion + 1 particle」という 6 粒子系でも 6 体ユニバーサル状態、6 体 Efimov 状態が現れるだろうと単純に予期したくなるのですが、少し注意が必要です。identical fermion の数が、4 と 5 というのは、原子核の殻模型の描像では大きく定性的に異なります。4 粒子までであれば、殻模型の調和振動子の基底・第一励起準位に合計 4 つの同種フェルミ粒子 (スピン偏極) を占有できます。しかし 5 粒子目を追加しようとする、さらに上の準位に入れる必要があり、エネルギー的に損をしそうだ、と思えるわけです。このような考察から、Ref.[153, 155] の著者たちは 5+1 粒子系では 6 体ユニバーサル状態や 6 体 Efimov 状態は現れないだろうと予想しています。この予想が本当に正しいのかどうか？7 粒子以上ではどうなるか？など疑問はわくばかりですが、これらについては、今後の研究で明らかになることが期待されます。特に、ボース粒子系では少数系から多体系へと移行していく様子が比較的良く分かっていることに比べると (Sec. 6.2 参照)、フェルミ粒子系においては未だに分かっていないことが多く、発展途上なのが現状です。

7 まとめ

本講義録では、量子少数系の示すユニバーサルな現象、特に Efimov 状態を紹介しました。Efimov 状態は 1970 年の発見された当時は、非常に奇妙で特異的な現象だと思われていました。しかし 50 年経過した現在では、冷却原子をはじめ、 ^4He 原子、中性子過剰核、 ^{12}C 核の Hoyle 状態、磁性体など、様々な物理系で Efimov 状態の観測や理論研究が進展しており、これら階層・エネルギースケールを超えた物理系を量子少数系の観点から統一的に理解する枠組みを与えています。このことは量子多体系において、異なる階層・エネルギースケールの系を統一的に理解することを可能にしている相転移・臨界現象のユニバーサリティの概念と類似している一方、「量子少数

系と多体系のユニバーサリティは果たしてどのようにつながっているのか？」という新しい疑問を提起しています。この疑問に答える様々な研究がまさに現在進展しています。さらに、Efimov 状態と異なる、新しいタイプの 3 粒子、4 粒子現象も次々に発見されています。

このように、Efimov 状態はただの 3 粒子の量子現象という枠組みを超えて、量子少数多体現象とそのユニバーサリティを理解することへとつながっています。「量子力学に従う系がどのように振舞うか？」を理解することは、物理学にとって最も重要な課題であると言っても過言ではありません。この物理学の究極の目標を達成するための重要な一步を Efimov が我々に与えてくれたと言えるのではないのでしょうか？本講義録が、量子現象の理解を試みる物理学者の挑戦の一助になることを願っています。

謝辞

本講義ノートを作成する機会となった、京都大学基礎物理学研究所での集中講義を企画して下さった兵藤哲雄氏（首都大）に感謝いたします。また、この講義ノートを書くに当たり、様々な助言をくださった以下の方々にも、感謝いたします：萩野浩一氏（京大）、谷村雄介氏（東北大）、西浦大樹氏（東北大）、延與佳子氏（京大）、大西明氏（京大）、吉田賢市氏（京大）、Pascal Naidon 氏（理研）。また、編集委員として本講義ノート作成に助言を下された中村哲氏（東北大）に感謝を申し上げます。

参考文献

- [1] V. Efimov: Phys. Lett. B **33** (1970) 563.
- [2] T. Kraemer, M. Mark, P. Waldburger, J. G. Danzl, C. Chin, B. Engeser, A. D. Lange, K. Pilch, A. Jaakkola, H. C. Nägerl, and R. Grimm: Nature **440** (2006) 315.
- [3] V. Efimov: Nucl. Phys. A **210** (1973) 157.
- [4] R. Amado and J. Noble: Phys. Lett. B **35** (1971) 25.
- [5] T. K. Lim, S. K. Duffy, and W. C. Damer: Phys. Rev. Lett. **38** (1977) 341.
- [6] D. V. Fedorov, A. S. Jensen, and K. Riisager: Phys. Rev. Lett. **73** (1994) 2817.
- [7] M. Zaccanti, B. Deissler, C. D'Errico, M. Fattori, M. Jona-Lasinio, S. Müller, G. Roati, M. Inguscio, and G. Modugno: Nature Physics **5** (2009) 586.
- [8] N. Gross, Z. Shotan, S. Kokkelmans, and L. Khaykovich: Phys. Rev. Lett. **103** (2009) 163202.
- [9] S. E. Pollack, D. Dries, and R. G. Hulet: Science **326** (2009) 1683.
- [10] M. Kunitski, S. Zeller, J. Voigtsberger, A. Kalinin, L. P. H. Schmidt, M. Schöffler, A. Czasch, W. Schöllkopf, R. E. Grisenti, T. Jahnke, et al.: Science **348** (2015) 551.
- [11] V. Efimov: Nature Physics **5** (2009) 533.
- [12] E. Braaten and H. W. Hammer: Phys. Rep. **428** (2006) 259.

- [13] E. Nielsen, D. Fedorov, A. Jensen, and E. Garrido: Phys. Rep. **347** (2001) 373.
- [14] F. Ferlaino and R. Grimm: Physics **3** (2010) 9.
- [15] P. Naidon and S. Endo: Rep. Prog. Phys. **80** (2017) 056001.
- [16] C. H. Greene, P. Giannakeas, and J. Pérez-Ríos: Rev. Mod. Phys. **89** (2017) 035006.
- [17] J. P. D’Incao: J. Phys. B **51** (2018) 043001.
- [18] L. D. Landau and E. M. Lifshitz: *Quantum mechanics: non-relativistic theory* (Butterworth-Heinemann, 1991).
- [19] B. Gao: Phys. Rev. A **59** (1999) 2778.
- [20] K. Huang and C. N. Yang: Phys. Rev. **105** (1957) 767.
- [21] T. F. O’Malley, L. Spruch, and L. Rosenberg: J. Math. Phys. **2** (1961) 491.
- [22] B. Gao: Phys. Rev. A **58** (1998) 1728.
- [23] B. Gao: Phys. Rev. A **58** (1998) 4222.
- [24] C. A. Regal, C. Ticknor, J. L. Bohn, and D. S. Jin: Phys. Rev. Lett. **90** (2003) 053201.
- [25] E. P. Wigner: Phys. Rev. **98** (1955) 145.
- [26] H.-W. Hammer and D. Lee: Ann. Phys. **325** (2010) 2212 .
- [27] D. S. Petrov. ”The few-atom problem”, Lecture Notes of the Les Houches Summer School, 2010.
- [28] P. Naidon and M. Ueda: Comptes Rendus Physique **12** (2011) 13.
- [29] Y. Yamaguchi: Phys. Rev. **95** (1954) 1628.
- [30] S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H. J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, and W. Ketterle: Nature **392** (1998) 151.
- [31] P. Dyke, S. E. Pollack, and R. G. Hulet: Phys. Rev. A **88** (2013) 023625.
- [32] S. Nascimbene, N. Navon, K. Jiang, F. Chevy, and C. Salomon: Nature **463** (2010) 1057.
- [33] *The BCS-BEC Crossover and the Unitary Fermi Gas (Lecture Notes in Physics)*, ed. W. Zwerger (Springer, 10) 2012 ed.
- [34] M. Horikoshi and M. Kuwata-Gonomaki: Int. J. Mod. Phys. E p. 1930001.
- [35] S. E. Pollack, D. Dries, M. Junker, Y. P. Chen, T. A. Corcovilos, and R. G. Hulet: Phys. Rev. Lett. **102** (2009) 090402.
- [36] I. Shimamura: JPS Journal **70** (2015) 168.
- [37] C. Chin, R. Grimm, P. Julienne, and E. Tiesinga: Rev. Mod. Phys. **82** (2010) 1225.
- [38] V. Gurarie and L. Radzihovsky: Ann. Phys. **322** (2007) 2.

- [39] Y. Wang and P. S. Julienne: *Nature Physics* **10** (2014) 768.
- [40] S. Roy, M. Landini, A. Trenkwalder, G. Semeghini, G. Spagnolli, A. Simoni, M. Fattori, M. Inguscio, and G. Modugno: *Phys. Rev. Lett.* **111** (2013) 053202.
- [41] J. Johansen, B. DeSalvo, K. Patel, and C. Chin: *Nature Physics* **13** (2017) 731.
- [42] R. Machleidt: *Phys. Rev. C* **63** (2001) 024001.
- [43] V. G. J. Stoks, R. A. M. Klomp, C. P. F. Terheggen, and J. J. de Swart: *Phys. Rev. C* **49** (1994) 2950.
- [44] R. B. Wiringa, V. G. J. Stoks, and R. Schiavilla: *Phys. Rev. C* **51** (1995) 38.
- [45] N. Ishii, S. Aoki, and T. Hatsuda: *Phys. Rev. Lett.* **99** (2007) 022001.
- [46] N. Ishii, S. Aoki, T. Doi, T. Hatsuda, Y. Ikeda, T. Inoue, K. Murano, H. Nemura, K. Sasaki, H. Q. Collaboration, et al.: *Phys. Lett. B* **712** (2012) 437.
- [47] R. W. Hackenburg: *Phys. Rev. C* **73** (2006) 044002.
- [48] R. Grisenti, W. Schöllkopf, J. Toennies, G. Hegerfeldt, T. Köhler, and M. Stoll: *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 2284.
- [49] S. Zeller, M. Kunitski, J. Voigtsberger, A. Kalinin, A. Schottelius, C. Schober, M. Waitz, H. Sann, A. Hartung, T. Bauer, et al.: *Proc. Nat. Acad. Scii* **113** (2016) 14651.
- [50] M. Przybytek, W. Cencek, J. Komasa, G. Łach, B. Jeziorski, and K. Szalewicz: *Phys. Rev. Lett.* **104** (2010) 183003.
- [51] K. T. Tang, J. P. Toennies, and C. L. Yiu: *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 1546.
- [52] V. Efimov: *Sov. J. Nucl. Phys* **12** (1971) 101.
- [53] P. Naidon, S. Endo, and M. Ueda: *Phys. Rev. A* **90** (2014) 022106.
- [54] G. A. Skorniakov and K. A. Ter-Martirosian: *Sov. Phys. JETP* **4** (1957) 648.
- [55] J. D’Incao, C. H. Greene, and B. Esry: *J. Phys. B* **42** (2009) 044016.
- [56] J. Wang, J. P. D’Incao, B. D. Esry, and C. H. Greene: *Phys. Rev. Lett.* **108** (2012) 263001.
- [57] H. Suno, B. D. Esry, C. H. Greene, and J. P. Burke: *Phys. Rev. A* **65** (2002) 042725.
- [58] C. Chin: *arXiv:1111.1484* (2011).
- [59] P. K. Sørensen, D. V. Fedorov, A. S. Jensen, and N. T. Zinner: *Phys. Rev. A* **86** (2012) 052516.
- [60] D. V. Fedorov and A. S. Jensen: *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 4103.
- [61] A. Jensen, E. Garrido, and D. Fedorov: *Few-Body Systems* **22** (1997) 193.
- [62] J. Macek: *J. Phys. B* **1** (1968) 831.
- [63] L. Faddeev: *Sov. Phys. JETP* **12** (1961) 1014.

- [64] L. Thomas: Phys. Rev. **47** (1935) 903.
- [65] Y. Castin and E. Tignone: Phys. Rev. A **84** (2011) 062704.
- [66] D. S. Petrov: Phys. Rev. A **67** (2003) 010703.
- [67] K. G. Wilson: Phys. Rev. B **4** (1971) 3174.
- [68] K. G. Wilson: Phys. Rev. B **4** (1971) 3184.
- [69] S. D. Glazek and K. G. Wilson: Phys. Rev. D **47** (1993) 4657.
- [70] S. D. Glazek and K. G. Wilson: Phys. Rev. Lett. **89** (2002) 230401.
- [71] D. A. Huse: Phys. Rev. B **24** (1981) 5180.
- [72] L. W. Bruch and K. Sawada: Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 25.
- [73] R. Hall and H. Post: Proc. Phys. Soc. **90** (1967) 381.
- [74] J.-M. Richard: arXiv preprint nucl-th/0305076 (2003).
- [75] P. M. A. Mestrom, J. Wang, C. H. Greene, and J. P. D’Incao: Phys. Rev. A **95** (2017) 032707.
- [76] B. D. Esry, C. H. Greene, and J. P. Burke: Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 1751.
- [77] P. F. Bedaque, E. Braaten, and H. W. Hammer: Phys. Rev. Lett. **85** (2000) 908.
- [78] J. Wolf, M. Deiß, A. Krüchow, E. Tiemann, B. P. Ruzic, Y. Wang, J. P. D ’ incao, P. S. Julienne, and J. H. Denschlag: Science **358** (2017) 921.
- [79] B. Huang, L. A. Sidorenkov, R. Grimm, and J. M. Hutson: Phys. Rev. Lett. **112** (2014) 190401.
- [80] S.-K. Tung, K. Jiménez-García, J. Johansen, C. V. Parker, and C. Chin: Phys. Rev. Lett. **113** (2014) 240402.
- [81] R. Pires, J. Ulmanis, S. Häfner, M. Repp, A. Arias, E. D. Kuhnle, and M. Weidemüller: Phys. Rev. Lett. **112** (2014) 250404.
- [82] J. Ulmanis, S. Häfner, R. Pires, E. D. Kuhnle, Y. Wang, C. H. Greene, and M. Weidemüller: Phys. Rev. Lett. **117** (2016) 153201.
- [83] S. Häfner, J. Ulmanis, E. D. Kuhnle, Y. Wang, C. H. Greene, and M. Weidemüller: Phys. Rev. A **95** (2017) 062708.
- [84] T. Lompe, T. B. Ottenstein, F. Serwane, A. N. Wenz, G. Zürn, and S. Jochim: Science **330** (2010) 940.
- [85] S. Nakajima, M. Horikoshi, T. Mukaiyama, P. Naidon, and M. Ueda: Phys. Rev. Lett. **106** (2011) 143201.
- [86] O. Machtey, Z. Shotan, N. Gross, and L. Khaykovich: Phys. Rev. Lett. **108** (2012) 210406.
- [87] R. Brühl, A. Kalinin, O. Kornilov, J. P. Toennies, G. C. Hegerfeldt, and M. Stoll: Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 063002.

- [88] M. Przybytek, W. Cencek, J. Komasa, G. Łach, B. Jeziorski, and K. Szalewicz: Phys. Rev. Lett. **104** (2010) 183003.
- [89] P. Naidon, S. Endo, and M. Ueda: Phys. Rev. Lett. **112** (2014) 105301.
- [90] F. Hoyle: Astrophys. J. Suppl. Ser. **1** (1954) 121.
- [91] A. Tohsaki, H. Horiuchi, P. Schuck, and G. Röpke: Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 192501.
- [92] Y. Funaki, A. Tohsaki, H. Horiuchi, P. Schuck, and G. Röpke: Phys. Rev. C **67** (2003) 051306.
- [93] H. Horiuchi, K. Ikeda, and Y. Suzuki: Prog. Theor. Phys. Suppl. **52** (1972) 89.
- [94] S. Ali and A. Bodmer: Nuclear Physics **80** (1966) 99.
- [95] Y. Fukuoka, S. Shinohara, Y. Funaki, T. Nakatsukasa, and K. Yabana: Phys. Rev. C **88** (2013) 014321.
- [96] H.-W. Hammer and R. Higa: Eur. Phys. J. A **37** (2008) 193.
- [97] R. Higa, H.-W. Hammer, and U. Van Kolck: Nucl. Phys. A **809** (2008) 171.
- [98] H. Suno, Y. Suzuki, and P. Descouvemont: Phys. Rev. C **91** (2015) 014004.
- [99] Y. Wang, J. Wang, J. P. D’Incao, and C. H. Greene: Phys. Rev. Lett. **109** (2012) 243201.
- [100] S. Dasgupta, I. Mazumdar, and V. S. Bhasin: Phys. Rev. C **50** (1994) R550.
- [101] I. Mazumdar and V. S. Bhasin: Phys. Rev. C **56** (1997) R5.
- [102] I. Mazumdar, V. Arora, and V. S. Bhasin: Phys. Rev. C **61** (2000) 051303.
- [103] I. Mazumdar, A. R. P. Rau, and V. S. Bhasin: Phys. Rev. Lett. **97** (2006) 062503.
- [104] C. Ji, C. Elster, and D. R. Phillips: Phys. Rev. C **90** (2014) 044004.
- [105] A. E. A. Amorim, T. Frederico, and L. Tomio: Phys. Rev. C **56** (1997) R2378.
- [106] D. L. Canham and H.-W. Hammer: Nucl. Phys. A **836** (2010) 275.
- [107] S. Mosby, N. Badger, T. Baumann, D. Bazin, M. Bennett, J. Brown, G. Christian, P. A. DeYoung, J. Finck, M. Gardner, et al.: Nucl. Phys. A **909** (2013) 69.
- [108] N. Orr: EPJ Web of Conferences, Vol. 113, 2016, p. 06011.
- [109] S. Leblond, F. M. Marqués, J. Gibelin, N. A. Orr, Y. Kondo, T. Nakamura, J. Bonnard, N. Michel, N. L. Achouri, T. Aumann, H. Baba, F. Delaunay, Q. Deshayes, P. Doornenbal, N. Fukuda, J. W. Hwang, N. Inabe, T. Isobe, D. Kameda, D. Kanno, S. Kim, N. Kobayashi, T. Kobayashi, T. Kubo, J. Lee, R. Minakata, T. Motobayashi, D. Murai, T. Murakami, K. Muto, T. Nakashima, N. Nakatsuka, A. Navin, S. Nishi, S. Ogoshi, H. Otsu, H. Sato, Y. Satou, Y. Shimizu, H. Suzuki, K. Takahashi, H. Takeda, S. Takeuchi, R. Tanaka, Y. Togano, A. G. Tuff, M. Vandebrouck, and K. Yoneda: Phys. Rev. Lett. **121** (2018) 262502.
- [110] Y. Nishida, Y. Kato, and C. D. Batista: Nature Physics **9** (2013) 93.

- [111] P. Zhang and H. Zhai: *Frontiers of Physics* **13** (2018) 137204.
- [112] O. Ovdad, J. Mao, Y. Jiang, E. Andrei, and E. Akkermans: *Nature communications* **8** (2017) 507.
- [113] J. Omachi, T. Suzuki, K. Kato, N. Naka, K. Yoshioka, and M. Kuwata-Gonokami: *Phys. Rev. Lett.* **111** (2013) 026402.
- [114] S. Deng, Z.-Y. Shi, P. Diao, Q. Yu, H. Zhai, R. Qi, and H. Wu: *Science* **353** (2016) 371.
- [115] S. Deng, P. Diao, F. Li, Q. Yu, S. Yu, and H. Wu: *Phys. Rev. Lett.* **120** (2018) 125301.
- [116] R. D. Amado and F. C. Greenwood: *Phys. Rev. D* **7** (1973) 2517.
- [117] L. Platter, H.-W. Hammer, and U.-G. Meißner: *Phys. Rev. A* **70** (2004) 052101.
- [118] H. W. Hammer and L. Platter: *Eur. Phys. J. A* **32** (2007) 113.
- [119] J. von Stecher, J. P. D’Incao, and C. H. Greene: *Nature Physics* **5** (2009) 417.
- [120] M. Hadizadeh, M. T. Yamashita, L. Tomio, A. Delfino, and T. Frederico: *Phys. Rev. Lett.* **107** (2011) 135304.
- [121] A. Deltuva: *Europhys. Lett.* **95** (2011) 43002.
- [122] F. Ferlaino, S. Knoop, M. Berninger, W. Harm, J. P. D’Incao, H. C. Nägerl, and R. Grimm: *Phys. Rev. Lett.* **102** (2009) 140401.
- [123] A. Deltuva: *Few-Body Systems* **54** (2013) 2419.
- [124] J. von Stecher: *J. Phys. B* **43** (2010) 101002.
- [125] J. von Stecher: *Phys. Rev. Lett.* **107** (2011) 200402.
- [126] M. Gattobigio and A. Kievsky: *Phys. Rev. A* **90** (2014) 012502.
- [127] Y. Yan and D. Blume: *Phys. Rev. A* **92** (2015) 033626.
- [128] A. Zenesini, B. Huang, M. Berninger, S. Besler, H.-C. Nägerl, F. Ferlaino, R. Grimm, C. H. Greene, and J. von Stecher: *New J. Phys.* **15** (2013) 043040.
- [129] A. N. Nicholson: *Phys. Rev. Lett.* **109** (2012) 073003.
- [130] L. W. Bruch and J. A. Tjon: *Phys. Rev. A* **19** (1979) 425.
- [131] T. K. Lim and P. A. Maurone: *Phys. Rev. B* **22** (1980) 1467.
- [132] O. Kartavtsev, A. Malykh, and S. Sofianos: *Sov. Phys. JETP* **108** (2009) 365.
- [133] H.-W. Hammer and D. T. Son: *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004) 250408.
- [134] O. I. Kartavtsev and A. V. Malykh: *Phys. Rev. A* **74** (2006) 042506.
- [135] J. Levinsen, P. Massignan, S. Endo, and M. M. Parish: *J. Phys. B* **50** (2017) 072001.
- [136] X.-J. Liu, H. Hu, and P. D. Drummond: *Phys. Rev. Lett.* **102** (2009) 160401.

- [137] S. Endo and Y. Castin: J. Phys. A **49** (2016) 265301.
- [138] R. Combescot, A. Recati, C. Lobo, and F. Chevy: Phys. Rev. Lett. **98** (2007) 180402.
- [139] S. M. Yoshida, S. Endo, J. Levinsen, and M. M. Parish: Phys. Rev. X **8** (2018) 011024.
- [140] M. Sun, H. Zhai, and X. Cui: Phys. Rev. Lett. **119** (2017) 013401.
- [141] Y. Nishida: Phys. Rev. Lett. **109** (2012) 240401.
- [142] S. Endo, A. M. García-García, and P. Naidon: Phys. Rev. A **93** (2016) 053611.
- [143] S. Piatecki and W. Krauth: Nature communications **5** (2014) 3503.
- [144] D. J. MacNeill and F. Zhou: Phys. Rev. Lett. **106** (2011) 145301.
- [145] N. G. Nygaard and N. T. Zinner: New J. Phys. **16** (2014) 023026.
- [146] O. I. Kartavtsev and A. V. Malykh: J. Phys. B **40** (2007) 1429.
- [147] S. Endo, P. Naidon, and M. Ueda: Phys. Rev. A **86** (2012) 062703.
- [148] J. Levinsen, T. G. Tiecke, J. T. M. Walraven, and D. S. Petrov: Phys. Rev. Lett. **103** (2009) 153202.
- [149] S. Endo, P. Naidon, and M. Ueda: Few-Body Systems **51** (2011) 207.
- [150] M. Jag, M. Zaccanti, M. Cetina, R. S. Lous, F. Schreck, R. Grimm, D. S. Petrov, and J. Levinsen: Phys. Rev. Lett. **112** (2014) 075302.
- [151] Y. Castin, C. Mora, and L. Pricoupenko: Phys. Rev. Lett. **105** (2010) 223201.
- [152] D. Blume: Phys. Rev. Lett. **109** (2012) 230404.
- [153] B. Bazak and D. S. Petrov: Phys. Rev. Lett. **118** (2017) 083002.
- [154] S. Endo and Y. Castin: Phys. Rev. A **92** (2015) 053624.
- [155] B. Bazak: Phys. Rev. A **96** (2017) 022708.