1章 複素数

(1) 複素数・複素平面

① 複素数 Complex Number

$$i^2 = -1 \quad (i = \sqrt{-1})$$

$$z = x + iy \qquad z \in \mathbb{C}$$

(c.f. 実数 $\mathbb{R}$
整数 $\mathbb{Z}$
自然数 $\mathbb{N}$ or $\mathbb{N}^+$)

実部 Real Part　$x = \mathrm{Re}\, z$

虚部 Imagin Part　$y = \mathrm{Im}\, z$

$x = 0$ のとき：純虚数 pure imaginary

② 複素演算：定義

$z_1 = x_1 + iy_2$, $z_2 = x_2 + iy_2$

$$\begin{cases} z_1 \pm z_2 := (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) \\ z_1 z_2 := (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ \dfrac{z_1}{z_2} := \dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} := \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\, \dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \end{cases}$$

分母分子に × $x_2 - iy_2$

○ 複素共役：Complex conjugate

$$\bar{z} = z^* = \overline{x + iy} = x - iy$$

どっちの表記もよくある。

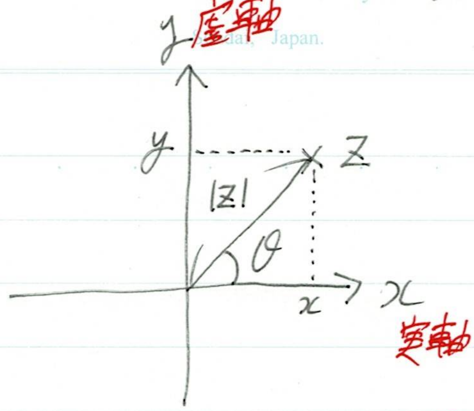
⇨ z が実数 ⇔ $z = \bar{z}$

z が純虚数 ⇔ $z = -\bar{z}$

$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

② 複素平面。極形式

$z = x + iy$　2つの成分 ⇨ 2次元表示



$|z| =$ 複素平面でのキョリ

$= \sqrt{x^2+y^2}$

$= |x+iy|$

ベクトル空間みたいに見る。
(c.f.) 高校の数学カリキュラム。

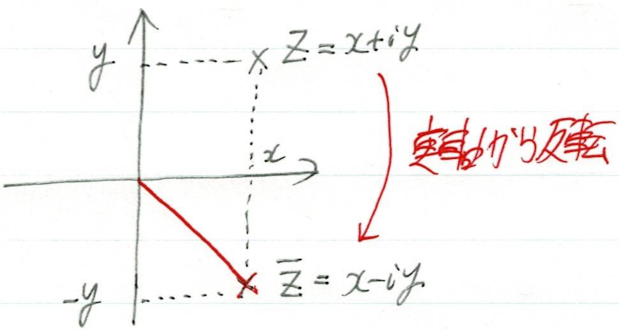
○ 性質

$$|z|^2 = z\bar{z}$$

$$|z| = |-z| = |\bar{z}|$$

$$|\mathrm{Re}\, z|,\ |\mathrm{Im}\, z| \le |z|$$

○ 複素共役の幾何学的意味



○ 極形式

★arg（偏角）は $0\sim2\pi$ の流儀と $-\pi\sim\pi$ の流儀がある。どっちも良く使う

$x = r\cos\theta$,　$y = r\sin\theta$

$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$,　$\theta = \arg z = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

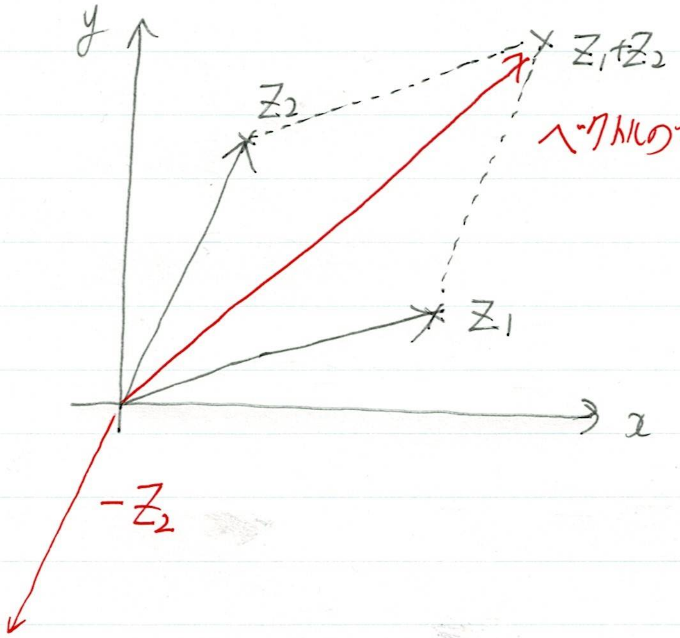
⇨ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ とも書ける。(後述)

(例1) $\sqrt{3}+i = \overset{\sqrt{3+1}}{2}\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$

$\left(\theta = \arg z = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}\right)$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

③ 複素演算の幾何学的意味



三角不等式

$$\left||z_1|-|z_2|\right| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1|+|z_2|$$

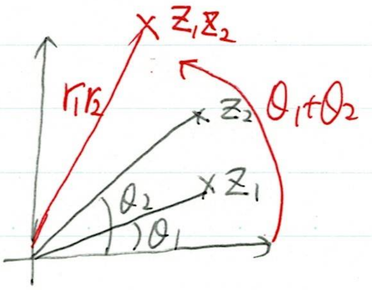
○ 極形式を使った計算

$$\begin{cases} z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_2) \\ z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \end{cases}$$

$z_1 z_2 = r_1 r_2\left[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right]$

$= r_1 r_2\left[\cos\underbrace{(\theta_1+\theta_2)} + i\sin\underbrace{(\theta_1+\theta_2)}\right]$

偏角が足された。



Department of Physics
Tohoku University
Sendai, Japan.

同様にして、以下が簡単に示せる

$$\begin{cases} \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right] \\ \arg\dfrac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 \\ z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \end{cases}$$

ド・モアブルの定理（定理1.1）

~~(例1) $(1+\sqrt{3}i)^{\circledcirc}=$~~

何でも良い定数

(例1) $(\sqrt{3}+i)^{\circledcirc} = \left\{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right\}^{\circledcirc}$

$$= 2^{\circledcirc}\left(\cos\left(\circledcirc\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\circledcirc\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

(2) 複素数列 z_n

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$$

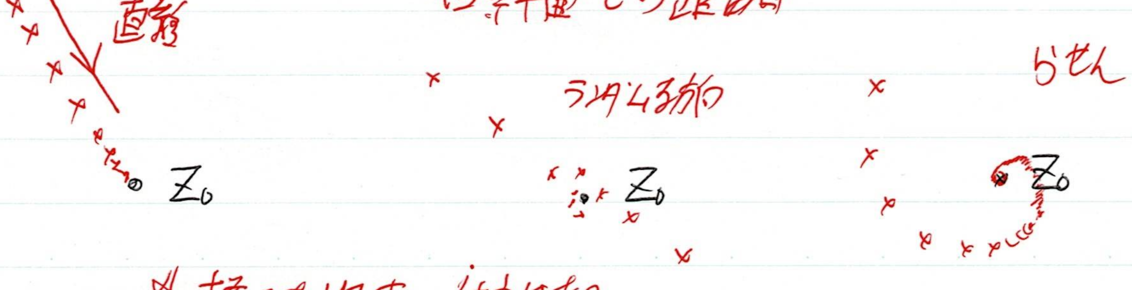
$$\Longleftrightarrow z_n \to z_0$$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon>0,\ {}^{\exists}N \text{ s.t.}$$

実数の収束・極限とほぼ同じ

$${}^{\forall}n \geq N \text{ に対して } \underbrace{|z_n - z_0|}_{} < \varepsilon$$

複素平面での距離



※様々な収束の仕方がある

定理 1.2. $z_n = x_n + iy_n$

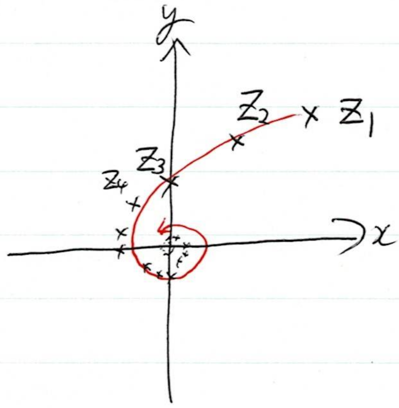
$$\lim_{n\to\infty} z_n = x_0 + iy_0 \iff \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ かつ } \lim_{n\to\infty} y_n = y_0$$

証明省略

(例) $z_n = \dfrac{1}{n}\left(\cos\dfrac{n\pi}{6} + i\sin\dfrac{n\pi}{6}\right)$

半径が小さくなる。+ぐるぐる回る

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0$$



定理 1.3

$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$, $\lim_{n\to\infty} w_n = w_0$ のとき、

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} (kz_n \pm lw_n) = kz_0 \pm lw_0 \\ \lim_{n\to\infty} z_n w_n = z_0 w_0 \\ \lim_{n\to\infty} \dfrac{z_n}{w_n} = \dfrac{z_0}{w_0} \end{cases}$$

証明略。

○ 複素級数

$\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ が収束 $\overset{\text{def}}{\iff}$ 部分和 $\sum_{n=0}^{k} z_n$ が $k\to\infty$ で収束

例：問1.11

$$z_{n+1}-z_n = a(z_n - z_{n-1}) \qquad n=1,2,3,\cdots$$

で定まる数列（$|a|<1$）の極限値。

$w_n = z_{n+1}-z_n$ とおくと

$$w_n = a w_{n-1} = a^2 w_{n-2} = \cdots = a^n w_0$$

$w_0 = z_1 - z_0$

$$z_n = \sum_{k=0}^{n-1} w_k + z_0 = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a^k}_{=\frac{1-a^n}{1-a} \to \frac{1}{1-a}} w_0 + z_0 = \frac{w_0}{1-a} + z_0$$

例：問1.12

$$z_n = r^n \left\{ \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right\} \qquad |r|<1$$

に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[r\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n$$ ∵ ド・モアブル

$$= \frac{1}{1 - r\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$ ∵ $|r|<1$ で収束

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - (1+i)r}$$