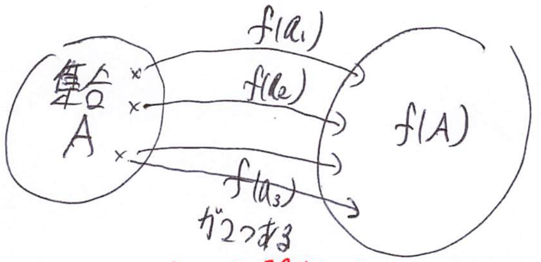
第2章 複素関数と微分

(1) 複素関数

① 写像，領域

map　　domain



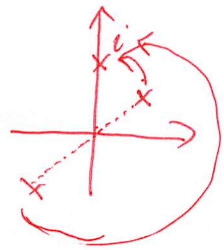
→ 2価関数（多価関数）

（例）$f(z)=z^{1/2}=\sqrt{z}$

複素平面 ≃ 2次元

⇨ 複素関数は2次元空間から2次元空間への写像（変換）

$$\sqrt{i}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\end{cases}$$



■ 開円板，閉円板

$|z-z_0|<r$ ：開円板 → こっちをよく使う

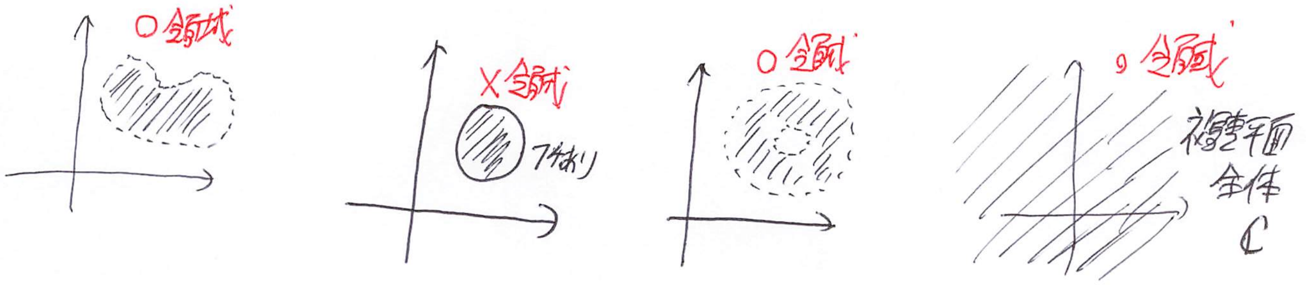
$|z-z_0|\leq r$ ：閉円板

■ 領域（domain）D

複素数の集合Dが領域である

def ⟺
- ① $\forall z_0 \in D$ に対して、開円板 $|z-z_0|<r$ がDに全て含まれるような小さな r をとれる
- かつ
- ② D内の任意の2点が折れ線で結べる（弧状連結）

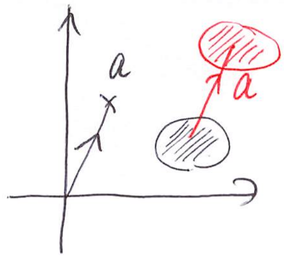
(e.g.)



$\mathbb{C}-\{0\}$ ：点のみ除外 ：○領域

○ 写像の例1：平行移動

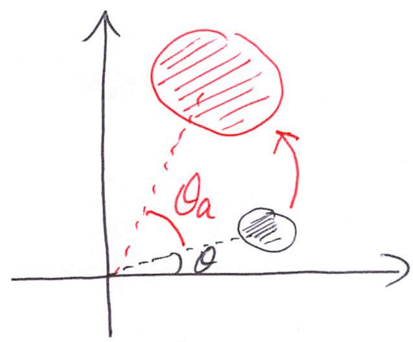
$$f(z) = z + a \qquad a = \mathrm{Re}\,a + i\,\mathrm{Im}\,a$$



○ 写像の例2：相似変換

$$f(z) = az = |a|\{\cos\theta_a + i\sin\theta_a\} \times |z|\{\cos\theta_z + i\sin\theta_z\}$$

$$= \underbrace{|a||z|}_{\text{大きさ}|a|\text{倍 拡大・縮小}}\{\underbrace{\cos}_{\theta_a\text{だけ回転}}(\theta_a+\theta_z) + i\sin(\theta_a+\theta_z)\}$$



○ 写像の例3： $w = z^2$

半径 r の円周 $\Longrightarrow$ 半径 r^2 の円周 倍まわる

x 軸に平行な直線： $y=\beta$ 定数, $z = x+i\beta$

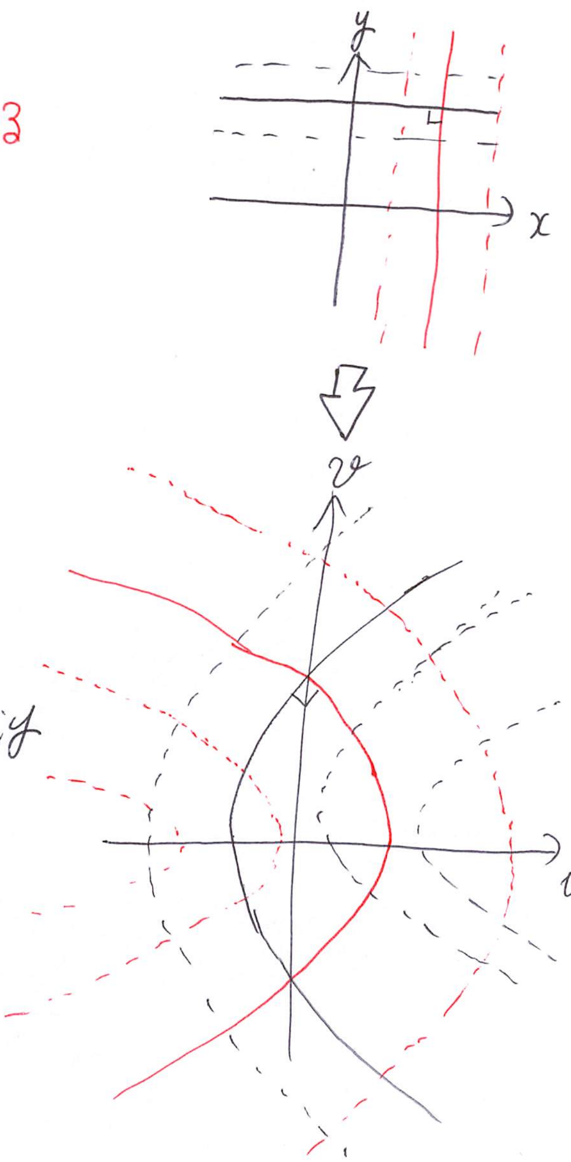
$$w = (x+i\beta)^2 = \underbrace{x^2-\beta^2}_{\equiv u} + \underbrace{2i}\,\underbrace{x\beta}_{\equiv v}$$

$$\Rightarrow u = \frac{v^2}{4\beta^2} - \beta^2$$ 放物線になる

y 軸に平行な直線： $x=\alpha$ 定数 $z = \alpha + iy$

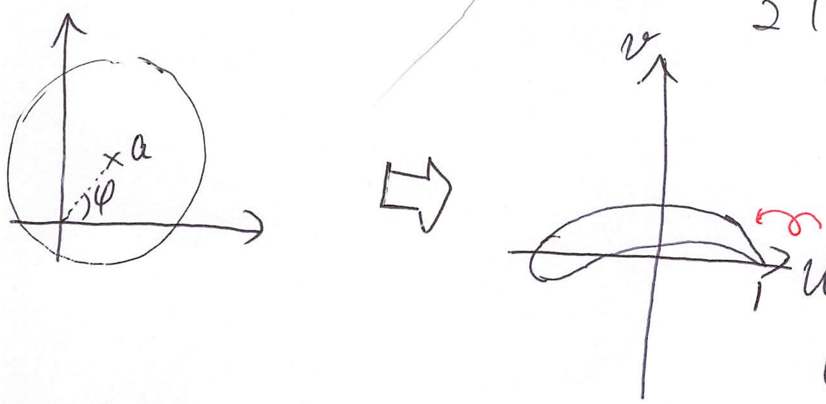
$$w = (\alpha+iy)^2 = \underbrace{\alpha^2-y^2}_{\equiv u} + \underbrace{2i}\,\underbrace{\alpha y}_{\equiv v}$$

$$u = -\frac{v^2}{4\alpha^2} + \alpha^2$$ 放物線



(c.f.) 正則関数は等角写像である 付録B, 定理B.1

○写像の例4：ジューコフスキー変換 $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$



飛行機のつばさみたいな形

(c.f.) 流体力学，揚力

その他 教科書 21ページ

☆ポイント

複素関数（変換）を使って色々な複雑にみえる図形を簡単に描ける．

→ でもなにか規則性あって美しい．

↑ 複素関数の「等角性」と「周期性」

(e.g.) マンデルブロー集合，ジュリア集合，…

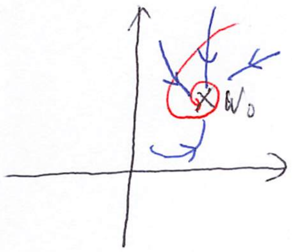
② 極限値

☑ 定義 2.1

$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ どんな $z \to z_0$ に対しても、同じ値 w_0 に近づく

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \ {}^{\forall}\varepsilon > 0, \ {}^{\exists}\delta > 0$ s.t.

$|z - z_0| < \delta$ なる ${}^{\forall}z$ で $|f(z) - w_0| < \varepsilon$



様々な近づけ方がある。近づけ方によらず、同じ値になるときのみ収束。

↑ 実数関数との大きな違い。

☑ 定理 2.1

$z = x + iy, \ z_0 = x_0 + iy_0, \ f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \ w_0 = u_0 + iv_0$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \\ \text{かつ} \\ \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = v_0 \end{cases}$$

証明略

☑ 定理 2.2

$\lim_{z \to z_0} f(z) = \alpha, \ \lim_{z \to z_0} g(z) = \beta$ のとき

$$\lim_{z \to z_0} kf(z) + lg(z) = k\alpha + l\beta$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) g(z) = \alpha\beta$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (g(z) \neq 0, \beta \neq 0)$$

(例2.4) $R(z) = \dfrac{a_n z^n + \cdots + a_1 z_1 + a_0}{b_m z^m + \cdots + b_1 z + b_0}$ $a_n, b_m \neq 0$ 有理関数

(c.f.) Padé近似

$$\lim_{z \to \infty} R(z) = \begin{cases} \infty & (n > m) \\ \dfrac{a_n}{b_m} & (n = m) \\ 0 & (n < m) \end{cases}$$

(例2.5) $f(z) = \dfrac{\overline{z}}{z}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= \cos(-2\theta) + i\sin(-2\theta)$

θの値によって値が異なる

⇨ 極限存在しない。

(c.f.) $\overline{z}$ や $|z|$, $\sqrt{z}$ などに注意!!

③ 連続関数

▨ 定義 2.2

$f(z)$が $z = z_0$ で連続 $\iff \displaystyle\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$. s.t.

$|z - z_0| < \delta$ なる $\forall z$ で $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

☆「近づけ方によらない」

$f(z)$が領域 D で連続 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall z \in D$ で f が連続

☒ 定理2.3

f, g が連続 $\Rightarrow$ $f+g$, cf, fg, $\dfrac{f}{g}$, $g(f(z))$ は全て連続

証明略

☒ 定理2.4

$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ が $z_0 = x_0 + iy_0$ で連続

$\Leftrightarrow$ u と v が両方 $(x,y) = (x_0, y_0)$ で連続

証明略

例 (問2.7)

f が連続 $\Rightarrow$ $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$, $|f|$ は全て連続

(2) 複素微分と正則関数 Holomorphic Function, Regular Function, Analytic Function

① 複素微分

図 定義 2.3

f が $z=z_0$ で微分可能 $\iff$ $\displaystyle\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ が存在

$\Delta z\to 0$ の近づけ方によらず、同じ値になる!

(例 2.6) $f(z)=z^n$

$$f(z+\Delta z)-f(z)=(z+\Delta z)^n-z^n$$

$$=nz^{n-1}\Delta z+\frac{n(n-1)}{2}z^{n-2}(\Delta z)^2+\cdots$$

これより

$$f'(z)=\frac{d}{dz}z^n=nz^{n-1}$$ 微分可能。フツーの実関数の時に同じ

(例 2.7) $f(z)=\bar{z}$

$\Delta z=|\Delta z|e^{i\theta}$ (c.f.) 例 2.5

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=e^{-2i\theta}$$

θ の値によってしまう ⇨ 微分不可能

※1 $\bar{z}$ や $|z|$ などが登場する関数は注意!

※2 z について多項式や、実数で滑らかだった関数 $f(r)$ を $r\to z$ にした関数は、微分可能なことがほとんど!

(c.f.) 一致の定理と解析接続

定理 2.5

f と g が微分可能

$$\Rightarrow \begin{cases} \circ \{kf(z)+lg(z)\}' = kf'(z)+lg'(z) \\ \circ \{f(z)g(z)\}' = f'(z)g(z)+f(z)g'(z) \\ \circ \left\{\dfrac{f(z)}{g(z)}\right\}' = \dfrac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{\{g(z)\}^2} \\ \circ \{g(f(z))\}' = g'(f(z))f'(z) \end{cases}$$

証明略。(実数関数の時と証明法は同じ)

~~予想：微分可能性~~

~~$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ が微分可能~~

~~$\Leftrightarrow$ u と v がともに微分可能~~

まちがい!!

定理 2.6 微分可能性の必要条件

→ 後で定理2.7で必要十分だと証明する

$f=u(x,y)+iv(x,y)$ が $z_0=x_0+iy_0$ で微分可能

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \end{cases}$$

↑ 注意。忘れがち。

コーシー・リーマン関係式 (条件)

→ 最も重要な式の1つ

を u と v は満たす。

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$$

☆ 実部と虚部は滑らかな複素関数では一対一対応してしまう

☆ 実軸方向の傾きと虚軸方向の傾きはある意味「同じ」にならないとダメ!

証明

実軸で近づける

$\Delta z = \Delta x$ のとき

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0 y_0)$$

虚軸の方から近づける

$\Delta z = i\Delta y$ のとき

$$f'(z_0) = \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}(x_0 y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0 y_0)$$

等しい

⇨ Cauchy-Riemann 関係式

「実軸で近づけても、虚軸で近づけても微分値は同じだよ！」

系：コーシー・リーマン関係の対偶

f がコーシー・リーマン関係を満たさない ⇨ f は微分不可能

(例 2.4) $f(z) = z^3 = (x+iy)^3 = \underbrace{(x^3 - 3xy^2)}_{\equiv u} + i\underbrace{(3x^2y - y^3)}_{\equiv v}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \xleftrightarrow{\text{等しい}} \dfrac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -6xy \xleftrightarrow{\times(-1)} \dfrac{\partial v}{\partial x} = 6xy, \end{cases}$$

⇨ コーシー・リーマン満たす。微分可能

(例 2.5-1) $f(z) = x^2 + iy^2$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x & \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2y \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 & \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

⇨ $x \neq y$ なら微分不可能。($x = y$ なら微分可能)

定理 2.7.

(例 2.5-2) $f(z)=x^3-iy^3$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2 \quad \dfrac{\partial v}{\partial y}=-3y^2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \end{cases}$$

⇨ $x\neq 0,\ y\neq 0$ なら微分不可能 ($x=y=0$ なら微分可能)
定理2.7.

② 正則関数

$z=z_0$ の ρ近傍 $U_\rho(z_0)=\{z : |z-z_0|<\rho\}$
色々なρの値の$U_\rho(z_0)$を「近傍」と総称.

☒ 定義 2.4.

$f(z)$が $z=z_0$ で正則 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ fが $z=z_0$ のある近傍 $U(z_0)$ で微分可能でf'が連続。
C^1級

fが領域Dで正則 $\Longleftrightarrow$ $\forall z\in D$ でfが正則

(例) 有理関数 $R(z)=\dfrac{a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0}{b_mz^m+\cdots+b_1z+b_0}$

$$\begin{cases} (\text{分母})\neq 0 \ \text{なら正則} \\ (\text{分母})=0 \ :\ \text{特異点} \end{cases}$$
singular point, singularity

☒ 定理 2.7 微分可能性 ≈ コーシー・リーマン関係

fがDで正則 $\Longleftrightarrow$
(i) $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ がDで存在し連続
かつ
(ii) コーシー・リーマン関係式をD上で満たす

☆ ヨコとタテの微分一致をチェックすれば、他の全方向も自動的にOK!

証明　必要性（⇨）については定理2.6で証明済.

十分性（⇦）の証明.

(i)より u と v は全微分可能で

$$\begin{cases} u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\Delta y + O(\Delta^2) \\ v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial v}{\partial y}\Delta y + O(\Delta^2) \end{cases}$$

よって　$f=u+iv$ について.

$$f(z+\Delta z) - f(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{= -\frac{\partial v}{\partial x}} + i\underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{= \frac{\partial u}{\partial x}}\right)\Delta y + O(\Delta^2)$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x + i\Delta y) + O(\Delta^2)$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \cancel{O(\Delta z)}$$

Δz の極限のとり方によらず、$f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$ となり微分可能

⇨ 正則

(例 2.8)　$f(z) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2} + i\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$ ← 実は $f(z) = \dfrac{1+i}{z}$ （例 2.9）

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{y^2-2xy-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{x^2-2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \xleftarrow{(-1)} \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{-x^2+2xy+y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

⇨ コーシー・リーマン みたすので $z=0$ を除き $\forall z$ で正則

☒ 例題 2.6

$F = u(x,y) + i\,v(x,y)$ が正則 ⇨ F は z のみの関数として上手く表わせる

証明

$$F = u(\underbrace{z-iy}_{=x}, y) + i\,v(\underbrace{z-iy}_{=x}, y)$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{z:\mathrm{fix}} = (-i)\frac{\partial u}{\partial x}(z-iy,y) + \frac{\partial u}{\partial y}(z-iy,y) + i\left\{\frac{\partial v}{\partial y}(z-iy,y) + (-i)\frac{\partial v}{\partial x}(z-iy)\right\}$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + i\left(-\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

↙ コーシー リーマン

$$= 0$$

よって F は z のみの関数で書ける!

問 2.11

訂正

$$x^2 \overset{-}{\cancel{+}} y^2 + i2xy = (x+iy)^2 = z^2 \Rightarrow \text{正則}$$

コーシー リーマン 使わずともわかる

☒ 例題 2.7

f が ①〜③ のいずれかを満たすなら、f は定数 in 領域 D

① $f'(z) = 0$ for $\forall z \in D$

② $u(x,y) \equiv$ 定数 、または $v(x,y) \equiv$ 定数 for $\forall z \in D$

③ $|f(z)| \equiv$ 定数 for $\forall z \in D$

※ 一部だけ平らにできない
⇨ 実関数との大いなる違い!!

証明　①　$\Rightarrow$　$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$

$\Rightarrow$ u と v は D 上で定数　$\Rightarrow$ f 定数

②　$\Rightarrow$ コーシーリーマンより　$\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$ で v も定数

$\Rightarrow$ f 定数

③　$|f(z)|=k=$ 定数　　$k\neq0$ とする（$k=0$ なら自明に $f=$ 定数）

$|f(z)|^2=u^2+v^2=k^2$　∂ 偏微分

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \\ u\dfrac{\partial u}{\partial y}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}_{\neq\vec{0}}=0$$

行列の det は 0 であるので

$$0=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2=|f'(z)|^2$$

コーシーリーマン

$\Rightarrow$ $f'(z)\equiv0$ で ① より $f=$ 定数

☆ 実部 $\underset{\text{C.R.}}{\rightleftarrows}$ 虚部　勝手に独立に決められない

(例2.8) $u(x,y)=y^3-3x^2y$ のとき、$v(x,y)$ をどう取れば $u+iv$ が正則？

コーシーリーマン

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = -6xy \xrightarrow{\text{積分}} v = -3xy^2 + g(x) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} = -3y^2+3x^2 \xrightarrow{\text{積分}} v = -3xy^2 + x^3 + h(y) \end{cases}$$

⇨ $v = -3xy^2 + x^3 +$ 定数

(c.f.) $f(z) = iz^3 + ix$(定数)

(例2.9) v からも u を再構成できる

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u = \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=\frac{\partial v}{\partial y}} + \frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{=-\frac{\partial v}{\partial x}} = 0$$

同様が v も成立.

⇨ 正則関数 $f=u+iv$ の実部と虚部は

$$\Delta u = 0 \quad , \quad \Delta v = 0$$

をみたす。i.e. 調和関数である. $(u \underset{}{\overset{\text{共役}}{\rightleftarrows}} v)$

Laplace 偏微分方程式：重要な偏微分方程式
- ○波動方程式（定常解）
- ○シュレディンガー方程式（$E=0, V=0$）
- ⋮

美しい性質を持つ特別な関数のfamily

⇨ 複素正則関数が様々な美しい性質を示す。