

(3) 複素初等関数

① 指数関数

実数のとき: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

⇓

虚数 y に対し $e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!}$

$= 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots$

と定まる項と都分が長いたぶん

$= \cos y$
 $+ i \left\{ y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots \right\}$

$= \sin y$

⇓ $e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad y \in \mathbb{R}$

純虚数の指数 $\Leftrightarrow$ 三角関数

これを併うと

$z = |z| e^{i\theta} = |z| \{ \cos \theta + i \sin \theta \}$

と極形式を書ける。

ド・モアブルの定理

$z_1 z_2 = |z_1 z_2| \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \}$ 第11章-③
 $= |z_1| |z_2| e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

⇓ $e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

複素指数関数の性質

⇓ 通常の $e^x e^y = e^{x+y}$
 と同じ

定義 2.5

$z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R})$ に対し

$$e^z \equiv e^x e^{iy} \equiv e^x (\cos y + i \sin y)$$

$\Rightarrow$ $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$ が $\forall z \in \mathbb{C}$ で成立

(例 2.10) e^z は $\forall z \in \mathbb{C}$ で特異点ない / zero-点ない.

(☺) If $e^{z_0} = 0$ then,

$$1 = e^0 = e^{z_0 + (-z_0)} = \underbrace{e^{z_0}}_{=0} \times e^{-z_0} = 0 \quad \text{おかしい}$$

□ e^z は正則で

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z$$

実関数と同型の式

proof $e^z = \underbrace{e^x \cos y}_{\equiv u} + i \underbrace{e^x \sin y}_{\equiv v}$

コーシー-リーマン条件

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

をみたす。 $\Rightarrow$ 正則

(c.f.)
問 2.19

$$\frac{d}{dz} e^{\alpha z} = \alpha e^{\alpha z}$$

実関数と同形

も $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ で成立 (証明略)

(c.f.) $f(z) = e^z$ は 実軸方向: 指数増大・減少
虚軸方向: 周期関数

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x \{ \cos y + i \sin y \}$$

幾何学的理解は例2.11参照

② 三角関数と双曲線関数

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$



$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

これを基に、以下のように複素三角関数を定義する

図 定義 2.6

$$\cos z \equiv \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z \equiv \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\tan z \equiv \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$$

- $\cos z, \sin z$ は $\forall |z| < \infty$ で正則 ($\because e^{iz}$ が正則)
- $\tan z$ は $\cos z = 0$ のとき発散。それ以外では正則
 $z = (n + \frac{1}{2})\pi$ が特異点。

三角関数の公式

$$\cos(z + 2n\pi) = \cos z$$

$$(n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

$$\sin(z + 2n\pi) = \sin z$$

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \quad - \star$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$$

$$\star z \in \mathbb{C}$$

$$\frac{d}{dz} \cos z = -\sin z$$

$$\frac{d}{dz} \sin z = \cos z$$

$$\frac{d}{dz} \tan z = \frac{1}{\cos^2 z} \quad \left(z \neq \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \right)$$

実数のときの公式をそのまま使えば良い

証明 略

$\star$ 一致の定理と解析接続のおかげ。

$\star$ したがって $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ が成り立ち

$|\sin z| \leq 1$ や $|\cos z| \leq 1$ は不成立。

$$\cosh z \equiv \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sinh z \equiv \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\tanh z \equiv \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$$

図 公式

$$\begin{cases} \cosh iz = \cos z \\ \sinh iz = i \sin z \\ \cos iz = \cosh z \\ \sin iz = i \sinh z \end{cases}$$

cos と cosh は「ほぼ同じ」関数
→ 実軸上 / 虚軸上の関数

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

$$\frac{d}{dz} \cosh z = \sinh z$$

$$\frac{d}{dz} \sinh z = \cosh z$$

$$\frac{d}{dz} \tanh z = \frac{1}{\cosh^2 z}$$

証明略

sh, cos の解析接続なので、三角関数と同じ式が全て成立
複素

③ 対数関数 : 多注意がいる関数

$x \in \mathbb{R}$ について

$$y = \log x \stackrel{\text{def}}{\iff} e^y = x \text{ を満たす } x > 0$$

図定義 2.8

$$w = \log z \stackrel{\text{def}}{\iff} e^w = \underbrace{z}_{z \neq 0} \text{ を満たすような } w$$

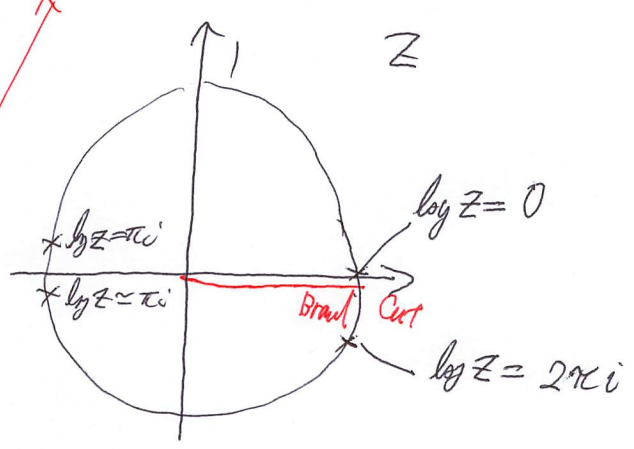
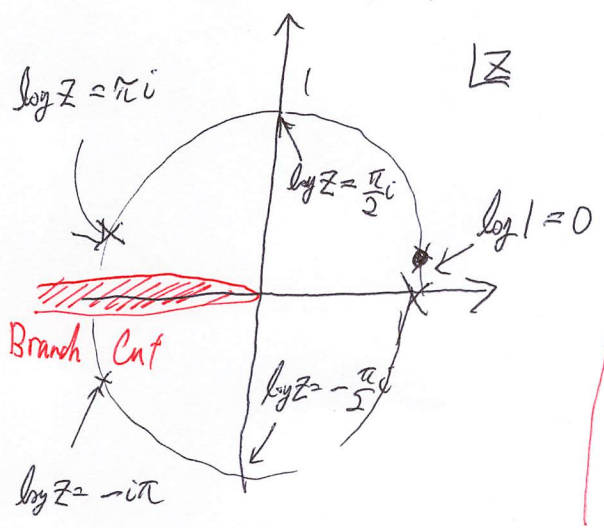
$z = r e^{i\theta}$, $w = u + i v$ について

$$\begin{cases} e^w = e^u e^{i v} \\ z = r e^{i\theta} \end{cases} \Rightarrow w = \log z = \log r + i\theta + \underbrace{2n\pi i}$$

$\log z = \log |z| + i \arg z$

 ← 多価関数

多価性は Branch Cut のために $2n\pi i$ の値がスライドする!



★ Mathematica, Lapack, Matlab などで $\text{Log } z$ 関数を使う注意
→ それぞれ Branch cut や主値の決め方がちがって、
 $2n\pi i$ が決まったりする。

(例) 2.12)

2-2-7

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2 + \underbrace{2n\pi i}_{\text{ここ注意!!}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z} \quad (z \neq 0)}$$

proof

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\log z - \log z_0}{z - z_0} = \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{w - w_0}{e^w - e^{w_0}} = \frac{1}{e^{w_0}} = \frac{1}{z_0}$$

(例) 2.28)

$$\log z = \log \underbrace{|z|} + i \underbrace{\arg z}_{\arctan \frac{y}{x} + 2n\pi}$$
$$= \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\log z = \log \sqrt{x^2 + y^2} + i \left\{ \arctan \frac{y}{x} + 2n\pi \right\}$$

→ コーシー・リーマン関数をみたす $\Rightarrow \log z$ は正則

④ べき乗関数 : 先注意の113関数

実数のとき

$$x^a = (e^{\log x})^a = e^{a \log x}$$

図定義 2.9

$$z^a \equiv e^{a \log z} \quad a, z \in \mathbb{C}$$

- $\log z$ は多価関数 $\Rightarrow$ 一般には z^a も多価
- しかし a が整数のときは

$$\begin{aligned} z^a &= e^{a \log z} \xrightarrow{z=re^{i\theta}} e^{a \{ \log r + i(\theta + 2n\pi) \}} \\ &= e^{a \{ \log r + i\theta \}} \times \underbrace{e^{a i 2n\pi}}_{=1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 一価関数. 通常の z^a と一致

(注意 2.11) e^z は定数 $e = 2.718\dots$ の z 乗ではない

~~$$e^z = e$$~~

$$(e \text{ の } z \text{ 乗}) = e^{z \log e} = e^{z(1+2n\pi i)} = e^z \times e^{2n\pi i z}$$

↑ e の z 乗の位での

$\Rightarrow e^{2n\pi i z} = 1$ ではない限り、

$$(e \text{ の } z \text{ 乗}) \neq e^z$$

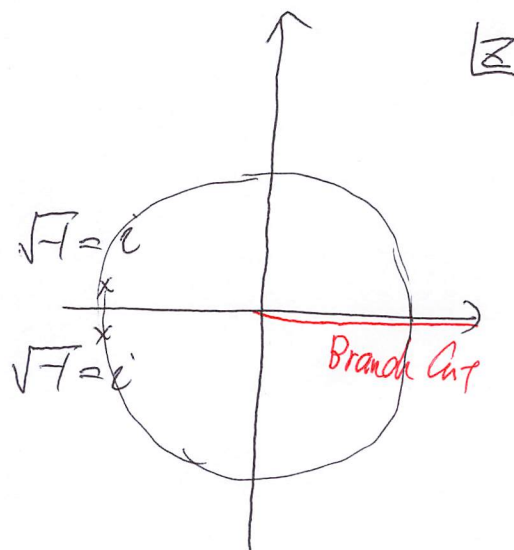
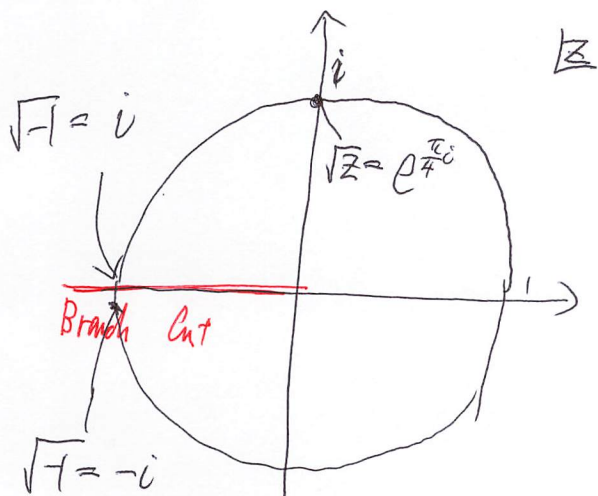
(例)

$$i^i = e^{i \log i}$$

$$= e^{-\frac{\pi}{2} - 2n\pi} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\log i = \frac{\pi}{2}i + 2n\pi i$$

2-2-9

(例) $\sqrt{z}$ 

$$\sqrt{-1} = i \text{ or } -i?$$

↳ Depends on how you introduce Branch Cut!!

$$\frac{d}{dz} z^a = a z^{a-1} \quad (z \neq 0)$$

証明

$$\frac{d}{dz} (e^{a \log z}) = e^{a \log z} \times \frac{a}{z}$$

$$= z^a \times \frac{a}{z}$$