

第3章 複素積分

3-1

(1) 複素積分

① 実区間積分

図定義

$$F(t) = \underbrace{U(t)}_{\text{実部}} + i \underbrace{V(t)}_{\text{虚部}} \quad U, V: t \text{ について微分可能. 実関数}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt \equiv \int_{\alpha}^{\beta} U(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} V(t) dt$$

もし $F'(t)$ が連続なら

$$\int_{\alpha}^{\beta} F'(t) dt = [F(t)]_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha)$$

が成立 (証明略)

$$\int_{\alpha}^{\beta} \{F(t)\}^n F'(t) dt = \frac{\{F(\beta)\}^{n+1} - \{F(\alpha)\}^{n+1}}{n+1}$$

も整数 $n \neq -1$ で成立. (証明略)

(例 3.1)

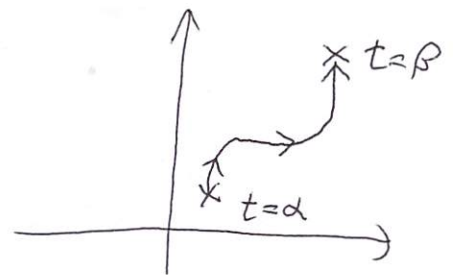
$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} e^{i\lambda t} dt &= \overset{\substack{\text{定数にのっとると} \\ \rightarrow}}{\int_{\alpha}^{\beta} \cos \lambda t dt} + i \int_{\alpha}^{\beta} \sin \lambda t dt \\ &= \left[\frac{1}{\lambda} \sin \lambda t - i \frac{1}{\lambda} \cos \lambda t \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{e^{i\lambda\beta} - e^{i\lambda\alpha}}{i\lambda} \end{aligned}$$

上の
公式を
使った

打成立。

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

(証明略)

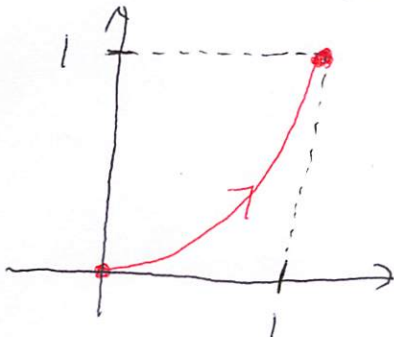
$$C : z = z(t) \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

$$Z'(t) \text{ が有限の点を除いて連続で } Z' \neq 0$$

def 区分的に滑分

複素積分では通常 γ を常に取る

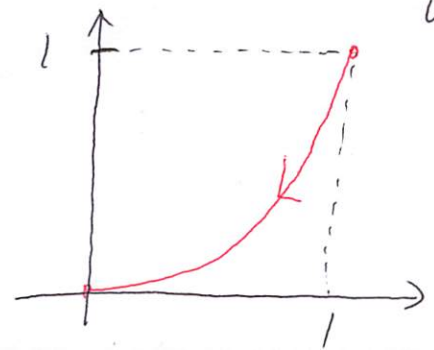
☆ C には 向きが についている。
~~~~~ 大事!!

(例 3.3)  $z = t + it^2 \ (0 \leq t \leq 1)$



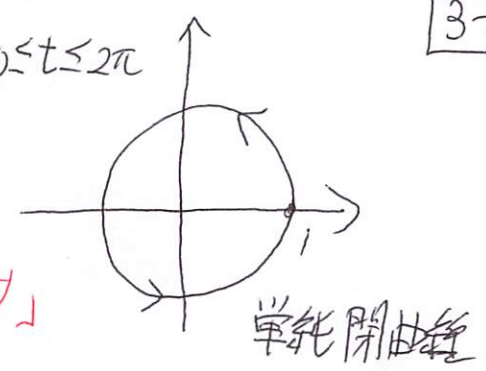
逆向  
 $\hookrightarrow$   
 $t \rightarrow 1-t$

(例) 3.4)  $z = (1-t) + i(1-t)^2$   
 $\uparrow$   $0 \leq t \leq 1$



(例 3.5)  $z(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

単位円



★ 反時計回り (左向き) が「正の向き」

③ 複素平面上の領域  $S'$

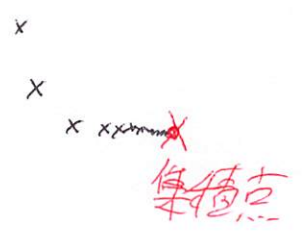
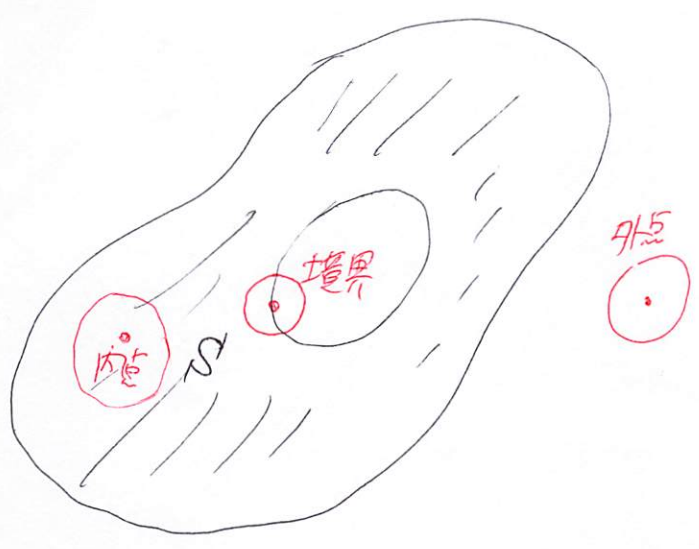
「内点」  $\stackrel{\text{def}}{\iff}$  十分小さい  $\exists \rho > 0$  で  $U_\rho(z) \in S'$

「外点」  $\stackrel{\text{def}}{\iff}$  "  $U_\rho(z) \cap S' = \emptyset$   
(i.e.  $U_\rho(z) \in S'^c$ )

「境界」  $\stackrel{\text{def}}{\iff}$  「内点」でも「外点」でもない

$\iff \forall \rho > 0 \quad U_\rho(z)$  が必ず内点と外点を包む

「集積点」  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \rho > 0, U_\rho(z_0)$  が必ず  $S$  の 要素を無数に含む  
可算無限個以上



## ④ 複素関数の積分

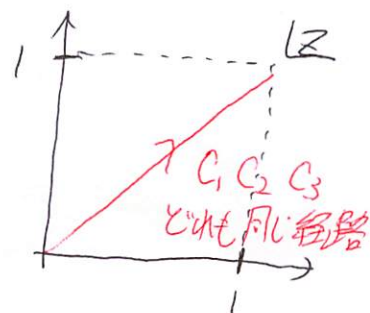
図定義 3.1

 $f(z)$ : 領域内で連続,  $C' = z'(t)$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ )

$$\int_C f(z) dz \equiv \int_\alpha^\beta f(z(t)) z'(t) dt$$

積分路・積分経路

≠ 経路積分

↳  $\frac{dz}{dt} dt = dz$  のイメージ(例題 3.1)  $f(z) = z^2$   $0 \leq t \leq 1$  $C_1 = z(t) = t + it$  のとき

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_0^1 (t+it)^2 \times \cancel{(1+i)} dt$$

$$= (1+i)^3 \int_0^1 t^2 dt$$

$$= \frac{(1+i)^3}{3}$$

 $C_2 = z(t) = t^n + it^n$  のとき

$$\int_{C_2} f(z) dz = \int_0^1 (t^n + it^n)^2 \times n(t^{n-1} + it^{n-1}) dt$$

$$= (1+i)^3 \times n \int_0^1 t^{3n-1} dt$$

$$= \frac{(1+i)^3}{3}$$

 $C_3 = \varphi(t) + i\psi(t)$  s.t.  $\varphi(0)=0, \varphi(1)=1$ , 等価的.

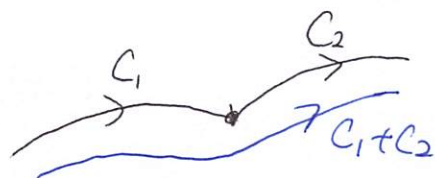
$$\int_{C_3} f(z) dz = \int_0^1 (\varphi + i\psi)^2 \times (\varphi' + i\psi') dt = (1+i)^3 \times \int_0^1 \varphi^2 \varphi' dt = \frac{(1+i)^3}{3}$$

★ 同じ値になる!  
 ⇨ 経路が同じであれば、  
 具体的なパラメータづけ  
 によらない。同じ値。  
 Cさえ指定すれば良い

公式

$$\int_C \{k f(z) + l g(z)\} dz = k \int_C f(z) dz + l \int_C g(z) dz$$

$$\int_{C_1+C_2} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz$$



$$\int_C f(z) dz = - \int_{-C} f(z) dz$$

逆方向の経路

$z(t)$  が常に実数のとき 実軸上

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(t) dt \quad \text{通常の定数積分と同じ。}$$

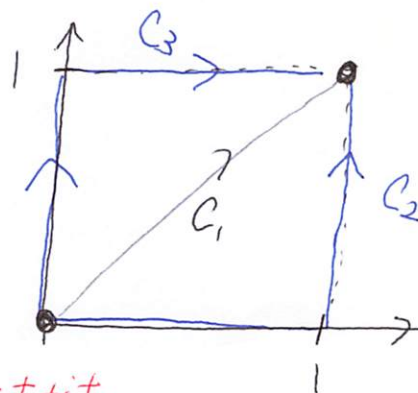
例題 3.2 → 問 3.5(1) で

$$f(z) = |z|^2$$

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_0^1 |z|^2 z'(t) dt$$

$$= \int_0^1 \cancel{2t^2} \times (1+i) dt$$

$$= \frac{2}{3} \cancel{1} (1+i)$$



$$\downarrow \begin{aligned} z(t) &= t+it \\ z' &= 1+i \end{aligned}$$

11'54 秒のところにあり!  
(例題 3.1)

次に

$$C_2 = \Gamma_1 + \Gamma_2 \quad \begin{cases} \Gamma_1 : z=t & 0 \leq t \leq 1 \\ \Gamma_2 : z=1+it & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

とかくと

$$\int_{\Gamma_1} |z|^2 z' dt = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

$$\int_{\Gamma_2} |z|^2 z' dt = \int_0^1 (1+t^2) \times i dt = \frac{4}{3}i \quad \Rightarrow \int_{C_3} f dz = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}i$$

最後に.

$$C_3 = \Gamma_3 + \Gamma_4 \quad \begin{cases} \Gamma_3 = z(t) = it \\ \Gamma_4 = z(t) = t+i \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \text{とあくと}$$

$$\int_{\Gamma_3} |z|^2 z' dt = \int_0^1 t^2 \times i dt = \frac{i}{3}$$

$$\int_{\Gamma_4} |z|^2 z' dt = \int_0^1 (1+t^2) dt = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \int_{C_3} f(z) dz = \frac{4}{3} + \frac{i}{3}$$

以上より

$$\int_{C_1} f(z) dz \neq \int_{C_2} f(z) dz \neq \int_{C_3} f(z) dz$$

積分値は 経路において一般には変化する

★ 正則関数なら等号成立で同じ値になる。(  $|z|^2$  は非正則!! )

定理3.4 コーシーの積分定理, 定理3.2

定理3.1

$C: z(t) \quad \alpha \leq t \leq \beta$  の長さ  $L$ .  $|f(z)| \leq M$

$$\Rightarrow \left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(z)| |z'(t)| dt \leq ML$$

証明略 (  $\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f| dt$  より自明.)

## 例題 3.3

$C_r$  周囲  $|z-a|=r$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  について

実はより一般に  
円周でなくとも  
成立.

$$\int_{C_r} (z-a)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

→ 留数積分 (定理 5.4).  $n = -1$  で  $\text{Res} = 1$  の特異点

proof

$$z(t) = a + r e^{it} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned} \int_{C_r} (z-a)^n dz &= \int_0^{2\pi} (r e^{it})^n \times \underbrace{i r e^{it}}_{=z'} dt & z' = i r e^{it} \\ &= i r^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt \end{aligned}$$

$n = -1$  のとき

$$\int = 2\pi i \quad \int_{C_r} (z-a)^n dz = 2\pi i$$

$n \neq -1$  のとき

$$\int_{C_r} (z-a)^n dz = i r^{n+1} \left[ \frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = 0$$

# ⑤ 原始関数

13-8

## 図定理 3.2

関数  $f$  が  $F' = f$  なる原始関数をもつ

$$\Rightarrow \int_C f(z) dz = \underbrace{F(b)}_{\text{終点}} - \underbrace{F(a)}_{\text{始点}}$$

積分経路により、始点と終点だけで決まる!

証明  $C: z(t) \quad \alpha \leq t \leq \beta$  について

$$\int_C f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dF}{dt}(z(t)) dt$$

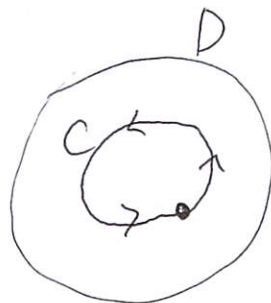
$$= \underbrace{F(z(\beta))}_{=b} - \underbrace{F(z(\alpha))}_{=a} //$$

— 図系: コーシーの積分定理のような定理

$f$  が領域  $D$  で原始関数をもつ。  $\Rightarrow$  ①と②が成立

①  $\forall C$ : 単純閉曲線 ( $C \in D$ )

$$\int_C f(z) dz = 0$$



② 始点と終点を固定すれば  $C$  を  $D$  内で

どんなに変形しても  $\int_C f(z) dz = F(b) - F(a)$  で一定

。 「原始関数の存在」  $\Leftrightarrow$  「正則」 とあるが コーシーの定理

。  $f(z) = |z|^2$  のような 非正則で原始関数がない場合は  $\nexists$ 。 例題 3.2

# ⑥ 線積分とグリーンの定理

3-9

図定義

$x(t), y(t)$  : 区分的に可微分  $x, y \in \mathbb{R}$

$C : x(t), y(t) \quad \alpha \leq t \leq \beta$

$$\int_C P(x, y) dx \equiv \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t)) x'(t) dt$$

$$\int_C P(x, y) dy \equiv \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t)) y'(t) dt$$

複素平面  $\Leftrightarrow$  2次元平面と見ると以下が成立

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y) \quad \text{について} \quad (z = x + iy)$$

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy)$$

図定理 3.3 グリーンの定理

$C$  :  $xy$ 平面の単純閉曲線

$\Omega$  :  $C$ に囲まれた領域

$P(x, y), Q(x, y)$  :  $\Omega$ で  $C^1$ 級

$$\Rightarrow \int_C (P dx + Q dy) = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

証明略。(教科書参照)

## ⑦ コーシーの定理

図定理 3.4 コーシーの積分定理

$f(z)$  :  $D$ で正則  $C$  : 単純閉曲線

$$\int_C f(z) dz = 0$$



(例 3.9)  $\int_C e^z dz = \int_C \cos z dz = \int_C \sin z dz = \int_C \cosh z dz = \int_C \sinh z dz = 0$   
全  $C$  内で正則

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy)$$

正則関数  $C'$  経  
(定理 2.7)

$P = u, Q = -v$   
↓ グリーンの定理

$P = v, Q = u$   
↓ グリーンの定理

$$= \iint_{\Omega} \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$$

↑  
コーシー-リーマン  
⇒ 0

↑  
コーシー-リーマン  
⇒ 0

$$= 0$$

### 図系 3.4

$\partial D$ : 領域  $D$  の境界が単純閉曲線

$f: \bar{D} = D \cup \partial D$  上で正則

$$\Rightarrow \int_{\partial D} f(z) dz = 0$$

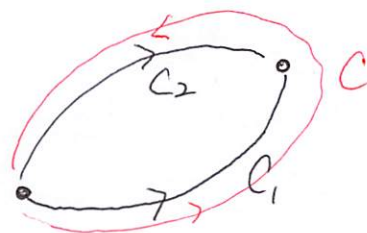
### 図系 (教科書にない)

$C_1$  と  $C_2$  が 始点と終点が同じ

$C = C_1 + (-C_2)$  が単純閉曲線

$f: C$  上および  $C$  が囲む領域で正則

$$\Rightarrow \int_{C_1} f(z) = \int_{C_2} f(z) dz$$



特異点がない場合は (i.e. 正則ならば)、積分路をいくら連続変形しても値は変。

トポロジカル不変量

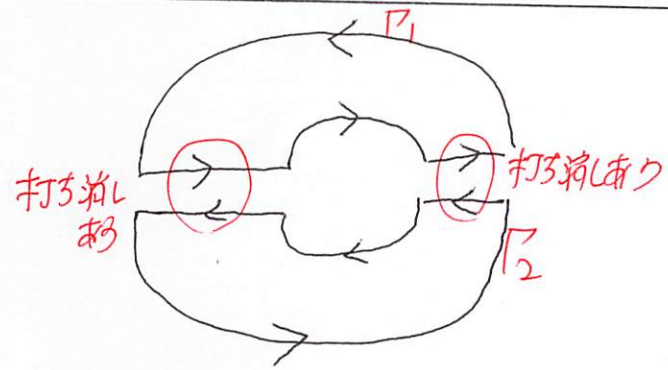
トポロジカルに等価な変形

定理 3.5

$D$ : 単純閉曲線  $C$  と  $C_1$  で囲まれた領域

$f$ :  $\bar{D}$  で正則

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz$$



$\bar{D}$  上で正則なので

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = 0, \quad \int_{\Gamma_2} f(z) dz = 0$$

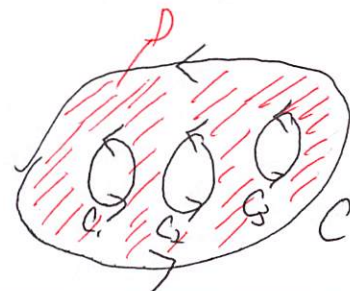
たしあわせ

$$\int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} f(z) dz = \int_C f(z) dz + \int_{-C_1} f(z) dz = 0$$

定理 3.6

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \dots + \int_{C_n} f(z) dz$$

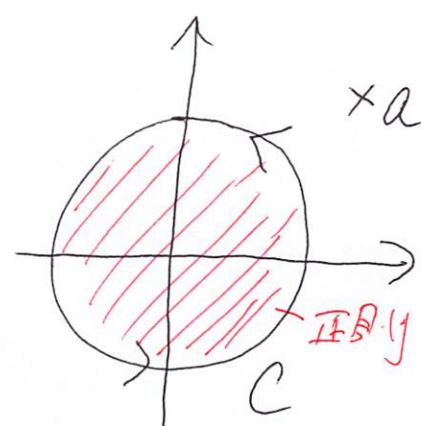
$f(z)$ :  $\bar{D}$  上で正則 (右図)



(例 3.4)  $C: |z| = \rho$  円周

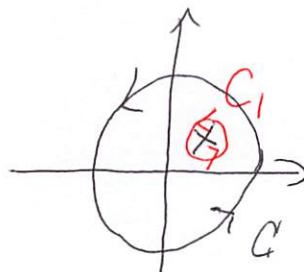
$$|a| > \rho のとき \quad \int_C \frac{dz}{z-a} = 0$$

円内に特異点なし



$C: |z| = \rho$  ,  $|a| < \rho$  のとき

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$



proof  $z=a$  周りの微小円周:  $C_1$

$$\int_C \frac{dz}{z-a} \stackrel{\text{定理 3.5}}{=} \int_{C_1} \frac{dz}{z-a} \stackrel{\text{例題 3.3}}{=} 2\pi i$$

図例題 3.6

$$\int_C \frac{dz}{z^2+1} = \int_C dz \frac{1}{2i} \left\{ \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right\}$$

$$= \frac{1}{2i} \int_C \frac{dz}{z-i} \quad \text{C.C.}$$

例題 3.5 ↓

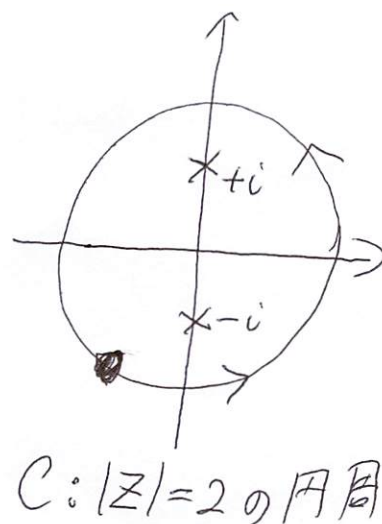
$$= \frac{1}{2i} (2\pi i - 2\pi i) = 0$$

(C.S.)

$$\int_C \frac{dz}{z+i} \stackrel{\text{例題 3.5}}{=} 2\pi i \quad \text{を使うこともよい。}$$

↖ 複素共役

↖ 等しい複素共役



\* C.C. とすると  
経路が反対向き  
にある (-1) 倍の  
符号がつかうことに  
注意

(2) 正則関数の積分表示 ※実用上(何れ値を計算するとき)は役に立たない!!

① 積分表示

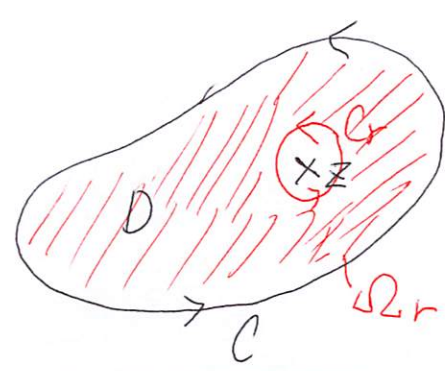
→ 数学的に正則関数の諸性質を示したいときや、  
何れ値・不連続点を証明に示したいときに便利!!

図 定理 3.7 コーシーの積分公式

$D$ : 単純閉曲線  $C$  で囲まれた領域

$f$ :  $\bar{D}$  上正則

$$\forall z \in D \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$



証明

$\frac{f(\xi)}{\xi - z}$  は  $\xi$  の関数として  $\partial D_r$  上で正則

$$\Rightarrow \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{C_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (\because \text{定理 3.5})$$

↓  $\xi = z + re^{it} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$$= i \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt$$

r=0 とし

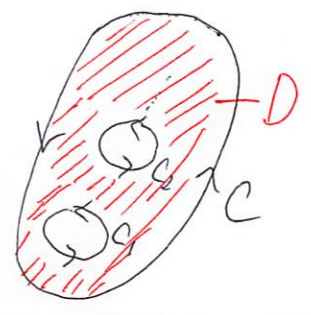
$$\rightarrow i \int_0^{2\pi} f(z) dt$$

$$= 2\pi i f(z)$$

図系 3.7

$f$ :  $\bar{D}$  上正則,  $\forall z \in D$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$



## ② 微分.

## 定理 3.8

$D$ : 単純閉曲線  $C$  で囲まれた領域,  $f: \bar{D}$  上正則

$$\Rightarrow \begin{cases} \textcircled{1} f \text{ は } \bar{D} \text{ 上で何回でも微分可能 (正則)} \\ \textcircled{2} \frac{d^n}{dz^n} f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (n=1, 2, 3, 4, \dots) \end{cases}$$

複素正則関数は  $\infty$  回微分可能 ( $C^\infty$ )  $\rightarrow$  実関数との大きな違い!!

証明

コーシーの積分定理より

$$\begin{cases} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ f(z + \Delta z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - (z + \Delta z)} d\zeta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\Delta z} \left[ \frac{1}{\zeta - (z + \Delta z)} - \frac{1}{\zeta - z} \right] d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta) \frac{1}{\underbrace{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)}_{\rightarrow (\zeta - z)^2}} d\zeta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

$n \geq 2$  はこれを帰納的に繰り返す.

## 例題 3.9 コーシーの不等式

$f: |z - a| \leq R$  で正則

$$\text{円周 } |z - a| = R \text{ 上で } |f(z)| \leq M \Rightarrow \left| \frac{d^n}{dz^n} f(a) \right| \leq \frac{n! M}{R^n}$$

証明  $z \in C = |z-a|=R$  について

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^n}{dz^n} f(a) \right| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi \right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\left| \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} \right|}_{\leq \frac{M}{R^{n+1}}} R dt \\ &\leq \frac{n! M}{R^n} \end{aligned}$$

定理 3.1

$$\left| \int_C f \right| \leq \int_a^b |f| |z'| dt \leq M L$$

定理 3.9

$f: D$  上連続

$C: a$  から  $z$  へ行く  $D$  内のパス

$\int_C f(\xi) d\xi$  が  $C$  によらず  $z$  のみで決まるとき、

$F(z) \equiv \int_a^z f(\xi) d\xi$  は  $D$  上正則。  $F'(z) = f(z)$

証明

$$\begin{aligned} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} &= \frac{1}{z - z_0} \left\{ \int_a^z f(\xi) d\xi - \int_a^{z_0} f(\xi) d\xi \right\} \\ &= \frac{1}{z - z_0} \int_{z_0}^z \underbrace{f(\xi)}_{\rightarrow f(z_0) \times (z - z_0)} d\xi \\ &\rightarrow f(z_0) \end{aligned}$$

$$F'(z_0) = f(z_0)$$

しかし原始関数が存在するわけではない。しかし、もし存在したら必ず正則になる!

定理 3.10 その定理 (コーシーの積分定理の逆)

3-16

$f$ : 領域  $D$  上連続

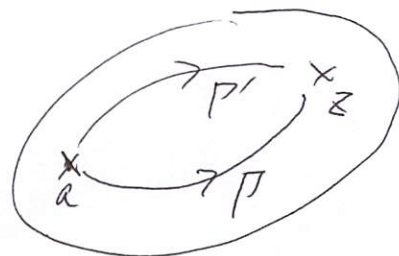
$$\forall C \text{ で } \int_C f(z) dz = 0 \Rightarrow f(z) \text{ は } D \text{ で正則}$$

$\uparrow$   $D$  内の閉曲線

$C = \Gamma - \Gamma'$  について

$$\int_C f = \int_\Gamma - \int_{\Gamma'} f(z) dz = 0$$

で 110 ページより。定理 3.9 より  $\int_a^z f(\zeta) d\zeta$  は正則  
 $\rightarrow$  定理 3.8 より その微分  $f(z)$  も正則



定理 3.11 リウヴィルの定理

$\mathbb{C}$  上全体で有界な整関数は定数

$$|f(z)| \leq M$$

$|z| < \infty$  の  $\mathbb{C}$  全体で正則

証明

コーシーの不等式 (例題 3.9) より

$$|f'(a)| \leq \frac{M}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad \text{for } \forall a$$

$$f'(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow f \equiv \text{定数} \quad \text{例題 2.8.}$$

定理 3.12 代数学の基本定理

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0) \quad n \text{ 次方程式}$$

は  $n$  個の複素数解をもつ。ただし重解は  $n$  個とカウント

proof outline

帰納法  $P_{k+1}$  が  $k+1$  個解をもつとき。

$$P_k(z) = 0 \text{ は } 1 \text{ つ以上解をもつ。} \Rightarrow P_k(z) = (z - \alpha_1) Q(z)$$

もし持たないと  $f(z) = 1/P_k(z)$  は整関数 & 有界

$k-1$  次方程式  
 $\Rightarrow k-1$  個解

$\Rightarrow f, P_k$  が定数とありおかし!