

第4章 関数の級数展開

4-1

(1) 一様収束 uniform convergence

図定義 4.1

$f_n(z)$: D 領域上の関数列

f_n が f に一様収束 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \exists N \text{ s.t.}$
 $\forall n \geq N, |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$

(e.g.) 定義 4.2

$S_n(z) \equiv \sum_{k=0}^n f_k(z)$ が $n \rightarrow \infty$ で一様収束 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ が $\varphi(z)$ に一様収束

図定理 4.1

f_n : D 上連続 が f に一様収束 $\Rightarrow f$ は D 上連続

図定理 4.2

C : 長±有限の曲線

f_n : C 上連続 が f に一様収束

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C f_n(z) dz = \int_C \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) dz = \int_C f(z) dz$$

図定理 4.3

f_n : 領域 D 上正則 が f に一様収束

$$\Rightarrow f \text{ は } D \text{ 上正則で } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d^k}{dz^k} f_n(z) = \frac{d^k}{dz^k} f(z)$$

極限と微分可換!!

図定理 4.4. ワイエルシュトラスの優級数判定法 M -Test

(i) $|f_n(z)| \leq M_n \quad n=0,1,2,\dots \quad z \in D$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ が収束 優級数

を満たす定数 M_n が存在 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ は D 上一様収束

証明: 全て省略

定理 4.5

 $f_n : D$ 上連続 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ が D 上で $\varphi(z)$ に一様収束 $\Rightarrow \varphi$ は連続

定理 4.6 項別積分定理

 C : 長土有限の曲線, $f_n : C$ 上連続 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ が $\varphi(z)$ に一様収束

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \int_C f_n(z) dz = \int_C \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) dz = \int_C \varphi(z) dz$$

定理 4.7 項別微分定理

 $f_n : D$ 上正則 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ が $\varphi(z)$ に一様収束

$$\Rightarrow \varphi(z) \text{ も正則。 } \frac{d^k}{dz^k} \varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^k}{dz^k} f_n(z) \quad k=1, 2, \dots$$

一様収束

証明略

例題 4.1

べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ が $z=z_0$ で収束

$$\Rightarrow |z-a| \leq \rho < r \text{ なる } \forall z \text{ で一様収束}$$

$r \equiv |z_0 - a|$

証明

 $a_n (z_0 - a)^n \rightarrow 0$ なので $|a_n (z_0 - a)^n| \leq M$ なる M 存在

$$|a_n (z-a)^n| = |a_n (z_0-a)^n| \left| \frac{z-a}{z_0-a} \right|^n < M \left(\frac{\rho}{r} \right)^n$$

 $\sum_{n=0}^{\infty} M \left(\frac{\rho}{r} \right)^n$ は収束 $\Rightarrow$ 定理 4.4 M-test より、べき級数は一様収束
 $|z-a| \leq \rho$

★ べき級数は収束半径内では正則

 $\Rightarrow$ 項別微積分や、極限の順序の入れ換え自由!!

例題 4.2

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\left| \frac{z^n}{n!} \right| \leq \frac{\alpha^n}{n!} \quad \text{if } |z| \leq \alpha$$

M-test で $\sum M_n$ は収束

$\forall \alpha > 0$ で φ は一様収束.

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \varphi(z)$$

$\varphi = e^z$

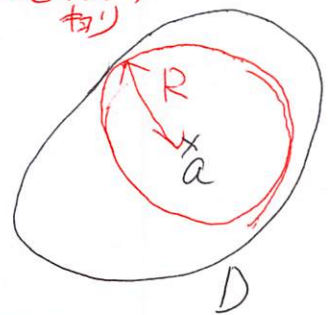
(2) Taylor 展開

定理 4.8 正則関数のテイラー展開

$f: D$ 上正則

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

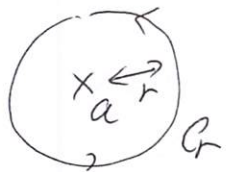
$|z-a| < R$ 一様収束
境界のわり



一意に展開される. $\star$ $\therefore$ Taylor 展開できる
しかも項別微積分自由

証明 コーシーの積分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$



$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\xi-a}}$$

$$= \frac{1}{\xi - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\xi-a} \right)^n$$

定理 4.4 M-test
 $\therefore$ 一様収束

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi \right\} (z-a)^n$$

定理 4.6 項別積分
 $\downarrow$ 定理 3.8

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

一意性の証明

4-4

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n \text{ と表せ、一様収束したとする。}$$

項別微分定理 4.7

$$\frac{d^k}{dz^k} f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) b_n (z-a)^{n-k}$$

$$= k! b_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) b_n (z-a)^{n-k}$$

よって $b_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ となり、Taylor展開の式と一致の一意。

図例 4.1 : 大事な初等関数

$$\begin{cases} e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} & \text{収束半径 } |z| < \infty \\ \sinh z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} & |z| < \infty \\ \cosh z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} & |z| < \infty \end{cases}$$

★実関数の時と同型、収束半径 ∞ (項別微積分が自由)

証明 $e^z, \sinh z, \cosh z$ は全て正則。定理 4.8 より上式は自明に導ける。

$$(c.f.) \begin{cases} e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \cdots \\ e^{-iz} = 1 - \frac{iz}{1!} + \frac{(-iz)^2}{2!} - \cdots \end{cases}$$

よって $\sinh z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cosh z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ を使って示せる。

(c.f.) $\cosh z, \sinh z$ も同様 (問 4.1)

例 4.2

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} \quad |z| < 1$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad |z| < 1$$

例 4.4 ロピタルの定理

$f, g: z=a$ 近傍で正則

$$f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a) = 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1), \quad g^{(n)}(a) \neq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$$

証明

定理 4.8 より

$$\begin{cases} f(z) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} (z-a)^{n+1} + \dots \\ g(z) = \frac{g^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n + \frac{g^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} (z-a)^{n+1} + \dots \end{cases}$$

$z \rightarrow a$ で小さい

$z \rightarrow a$ で小さい

例題 4.3

$$f(z) = \frac{1}{1-z} \quad \text{の } z=i \text{ 周りの } \bar{T}\text{-} \bar{L}\text{-展開}$$

$$= \frac{1}{1-i-(z-i)}$$

$$= \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-i}{1-i}} = \frac{1}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{1-i} \right)^n \quad \text{for } \frac{|z-i|}{\sqrt{2}} < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-i)^{n+1}} (z-i)^n$$

(3) - 級の数

定理 4.9

$f: D$ 上正則, $a \in D$ がゼロ点で

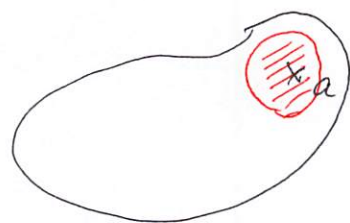
$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n)}(a) = \dots = 0 \Rightarrow f(z) \equiv 0 \text{ on } D$$

証明 正則なので展開

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \dots = 0 \quad \text{around } a$$

$\Rightarrow a$ 周りの何らかの領域で $f \equiv 0$

領域 D は連結な領域なので、 $\forall z \in D$ で $f \equiv 0$



(c.f.) $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(k-1)}(a) = 0$, $f^{(k)}(a) \neq 0$ k位のゼロ点

(e.g.) $f(z) = z^2$ の $z=0$ は 2位のゼロ点

定理 4.10

$f: D$ 上正則, $f \neq 0$

$a \in D$ が f の k位のゼロ点

$\Rightarrow a$ の近傍 U で $\begin{cases} f(z) = (z-a)^k g(z) \\ g(a) \neq 0 \end{cases}$ と U 上正則関数で書ける

証明 $z=a$ まわりで正則なので Taylor 展開

$$f(z) = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k + \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} (z-a)^{k+1} + \dots$$

$$= (z-a)^k \left[\frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \dots \right]$$

≡ g(z) とおく

f は正則で一般化 $\Rightarrow g(z)$ も一般化し、正則。

しかも $g(a) \neq 0$ ($\because f^{(k)}(a) \neq 0$)

(⊖ k+1位のゼロ点 = 0)

定理 4.11

$f: D$ 上正則, $f \neq 0$

f のゼロ点 は 全て孤立 (i.e. $f(a)=0 \Rightarrow a$ の 十分近い領域 $U_\varepsilon(a)$ で
ゼロ点 は a のみ)

証明 $z=a$ は 有限 位数の ゼロ点 (位数 とする) もし そうだと 定理 4.9 より $f \neq 0$ で矛盾

定理 4.10 より

$$f(z) = (z-a)^k g(z)$$

ある 正則 関数 $g(z)$ が $g(a) \neq 0$, g は 正則 (連続) 関数 存 するので

$U_\varepsilon(a)$ において $g(z) \neq 0 \Rightarrow U_\varepsilon$ での $f(z)$ の ゼロ点 は a のみ

定理 4.12 一致の定理: 集積点 ver

$\left\{ \begin{array}{l} z_n: \text{領域 } D \text{ 上の 互いに異なる点 がある 無限点列} \\ z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \in D \\ f: D \text{ 上正則} \end{array} \right.$

$$f(z_n) = 0 \quad (n=0,1,2,\dots) \Rightarrow f \equiv 0 \text{ on } D$$

証明 正則 $\Rightarrow$ 連続 存 するので

$$f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = 0 \quad \text{ゼロ点} \quad \text{a は ゼロ点}$$

もし $f \neq 0$ だと 定理 4.11 より, a は 孤立点 ~~集積点~~。なのに $n \rightarrow \infty$ とかけば 非常に近い $z = z_n$ で $f(z_n) = 0 \Rightarrow$ 孤立点 ゼロ点 とならず 矛盾, $f \neq 0$ ではあり!

定理 (系 4.12) 一致の定理: 集積点 ver

$z_n: \text{領域 } D \text{ 上の 互いに異なる点 がある 無限点列}$

★ 大学数学 での 最も美しく 強かな定理

$f, g: D$ 上正則

$$f(z_n) = g(z_n) \quad n=0,1,2,\dots \Rightarrow f \equiv g \text{ on } D$$

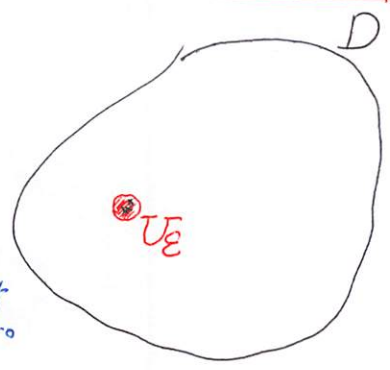
高々 可算無限個の点で 一致していれば、領域全体 (非可算無限) の点で 一致
 集積点や z_n より 大いに 離れた点でも!!

図系 (教科書にない) - 一致の定理: 微分可能 Ver

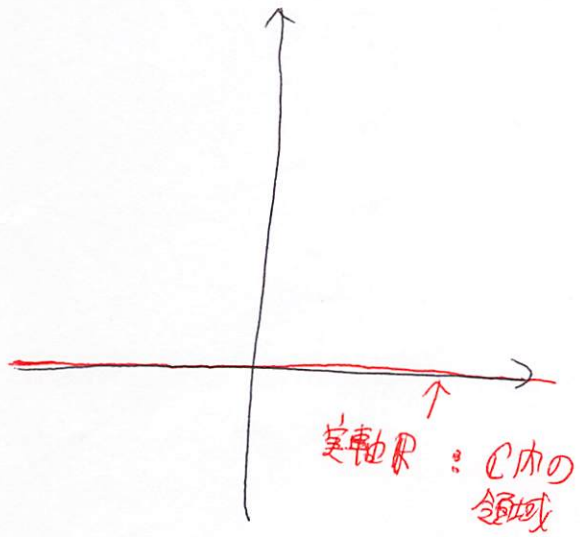
$f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ 正則

$\exists U \subset D$: 微小領域で $f(z) \equiv g(z) \Rightarrow D$ 上全て $f(z) \equiv g(z)$

証明 U 内に適当に点列 $z_n \in U$ を作れば、
一致の定理 集積点 ver を使えよ。



★ Local に一致していれば、Global に必ず一致する!!
複正則関数特有。実関数に無い性質。



$$\begin{cases}
 e^x \mapsto e^z & \begin{matrix} x \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{C} \end{matrix} \\
 \sinh x \mapsto \sinh z & \begin{matrix} x \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{C} \end{matrix} \\
 \text{特に } z = iy \text{ のとき} \\
 \sinh x \mapsto \sin y
 \end{cases}$$

実軸より $\mathbb{C}$ や虚軸に解析接続して 2 章
複素初等関数と定数 $\Rightarrow$ 全ての関数からそのまま
一致の定理のおかげで、解析接続は一貫。

図 定理 4.13 最大値の原理

$f: D \rightarrow \mathbb{C}$ 正則、定数でない。

$\Rightarrow |f(z)|$ は D 内で最大値をとらない (i.e. 境界 ∂D で最大値をとる)

★ 正則関数や調和関数の特徴

Laplace 方程式 $\Delta u = \Delta v = 0$ の解 (Sec. 2.2)

波動方程式、電磁気の Maxwell 方程式

$\hookrightarrow$ 「アーンシュの定理」

静磁場で極大をとらない $\Rightarrow$ 電場/磁場で Trap できない!!
(電場)

静

物や粒子を

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a+re^{it}) dt$$

$z=a$ で最大値 M とおくと

$$M = |f(a)| \stackrel{\text{定理 3.1}}{\leq} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a+re^{it})| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M dt = M$$

$$\Rightarrow M = |f(a+re^{it})|$$

ゆえに $\forall r, t$ で成立するので、 $|f(z)| \equiv M$ 。例題 2.7 より $f \equiv \text{定数}$ となり矛盾してしまう。



(4) ローラン展開: 特異点まわり ver のテラー展開

図 定理 4.14

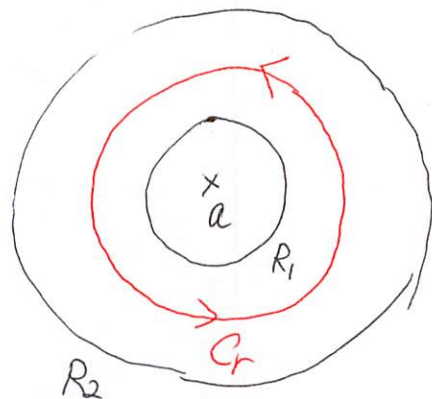
f : 円環領域 $D: R_1 < |z-a| < R_2$ で正則

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

と一意にローラン級数展開できる。

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz$$

a からの半径 $R_1 < r < R_2$ の円周



★この公式使うより、他の方法でテキトーに求めた方が早い! (一意性が保障されてる)

(例) 4.5 $f(z) = z^3 e^{1/2}$

$$e^{1/2} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} z^2 + \dots \quad 0 < |z| < \infty$$

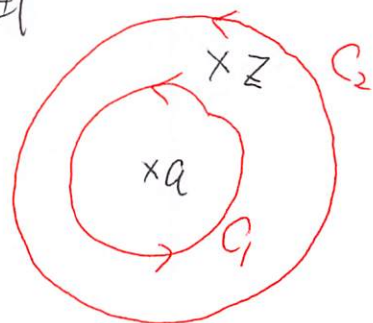
$$\Rightarrow f(z) = z^3 + z^2 + \frac{1}{2!} z + \frac{1}{3!} + \dots \quad 0 < |z| < \infty$$

証明

4-10

C_1 と C_2 に囲まれた全領域でコーシーの積分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$



$$\frac{1}{\zeta - z} = \begin{cases} \frac{1}{\zeta - a} \times \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} & |z-a| < |\zeta-a| \quad \uparrow C_2 \\ \frac{-1}{z-a} \times \frac{1}{1 - \frac{\zeta-a}{z-a}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{-(\zeta-a)^m}{(z-a)^{m+1}} & |\zeta-a| < |z-a| \quad \uparrow C_1 \end{cases}$$

を代入すると 個別積分を実行

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} (z-a)^n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-a)^{-m+1}} (z-a)^{-m}$$

$\downarrow C_r$ $\downarrow C_r$
 a_n a_{-m}

一意性 もし $f(z) = \sum_n b_n (z-a)^n$ と他の形に展開できたとすると

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-a)^{m+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \sum_n b_n (\zeta-a)^{n-m-1} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_n b_n \int_{C_r} (\zeta-a)^{n-m-1} d\zeta \\ &= 2\pi i \delta_{m,n} \quad (\because \text{例題 3.3}) \\ &= b_m \end{aligned}$$

↓ 個別積分

よって一意である。

例題 4.6

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} = \begin{cases} \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n (z-i)^{n-1} & 0 < |z-i| < 2 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{i}\right)^n \frac{1}{(z-i)^{n+2}} & |z-i| > 2 \end{cases}$$

中心や、円環の半径によつてローラン級数の形は異なる

証明

$$\frac{1}{z+i} = \begin{cases} \frac{1}{(z-i)+2i} = \frac{1}{2i} \frac{1}{1 - \frac{i}{2}(z-i)} = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{i}{2}(z-i) \right\}^n \\ \frac{1}{z-i} \frac{1}{1 - \frac{2}{i(z-i)}} = \frac{1}{z-i} \times \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{2}{i(z-i)} \right\}^n \end{cases}$$

を $f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$ に代入すればよい。

(5) 孤立特異点

→ 近傍に特異点がないもの。例 $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ $z = \pm i$

反例 $f(z) = \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{z}}$ $z = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{Z}$)

① 除去可能な特異点

図 定理 4.15 リーマンの定理 および 定理 4.16

$f: \mathbb{C} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ $0 < |z-a| < R$ で正則

a が $f(z)$ の除去可能な特異点 $\Leftrightarrow f(z)$ が $0 < |z-a| < R$ で有界

$f(z)$ に $f(a)$ の値をつか加之は
正則関数になること。

$\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow a} f(z)$ が有限確定

証明省略

教科書参照

② 極

$0 < |z-a| < R$ におけるローラン展開が

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-a)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z-a)^{k-1}} + \dots + a_0 + a_1(z-a) + \dots$$

とあるとき **k位の極** という。 ($a_{-k} \neq 0$)
 $\nwarrow$ 位数

図 定理 4.17, 4.18

$$a \text{ が } f \text{ の } k \text{ 位の極} \iff 0 < \lim_{z \rightarrow a} |(z-a)^k f(z)| < \infty$$

$$\iff |z-a| < R \text{ で正則な } h(z) \text{ が存在し、} h(a) \neq 0 \text{ のとき}$$

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^k} \quad (0 < |z-a| < R) \text{ と表わせる}$$

証明略

$$\star f(z) \text{ が } k \text{ 位の極} \iff 1/f(z) \text{ が } k \text{ 位のゼロ点}$$

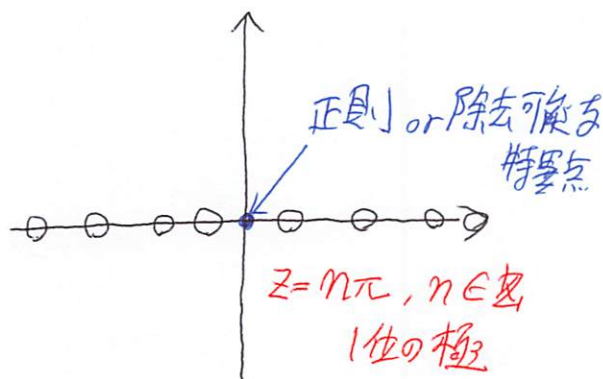
例題 4.7

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-i)^4} \quad \because z=i \text{ が 4 位の極}$$

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z^4} \approx \frac{1 + \frac{z}{2!} + \dots}{z^4} \quad \because z=0 \text{ が 3 位の極}$$

例題 4.8

$$f(z) = \frac{z}{\sinh z}$$



例 4.8

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!} \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \dots$$

$z=0$ は孤立真性特異点