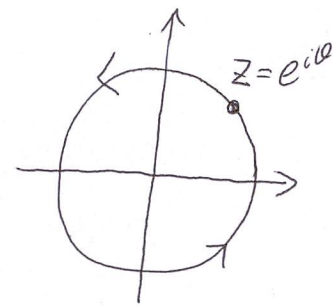


(2) 定積分の計算 : この講義で最も重要!!

① $\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$ 型の計算

$$z = e^{i\theta} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \text{と置く}$$



$$\begin{cases} dz = i e^{i\theta} d\theta = i z d\theta \\ \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \end{cases}$$

を使い、留数積分を実行.

例題 5.5.

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin\theta} \quad \left. \begin{array}{l} d\theta = \frac{dz}{i z} \end{array} \right\}$$

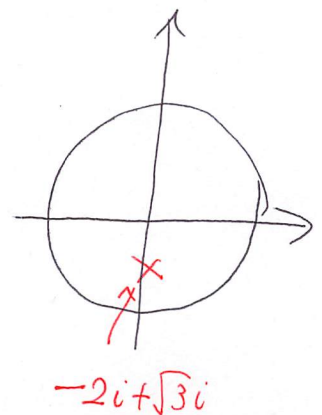
$$= \int_C \frac{1}{2 + \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)} \frac{dz}{i z}$$

$$= \int_C \frac{2}{z^2 + 4i z - 1} dz$$

$$f(z) = \frac{2}{z^2 + 4i z - 1} = \frac{2}{\{z + (2i - \sqrt{3}i)\} \{z + (2i + \sqrt{3}i)\}} \quad \text{より}$$

$$z = -2i + \sqrt{3}i, -2i - \sqrt{3}i \text{ に特異点}$$

こより C 内にあり, 1 位の極



$$I = 2\pi i \times \text{Res}[f, -2i + \sqrt{3}i]$$

$$= \lim_{z \rightarrow -2i + \sqrt{3}i} (z + 2i - \sqrt{3}i) \times f(z)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}i}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta d\theta = \int_C \left[\frac{1}{2} \left\{ z + \frac{1}{z} \right\} \right]^{2n} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i 2^{2n}} \int_C \frac{(z^2 + 1)^{2n}}{z^{2n+1}} dz$$

$z=0$ に極 $\frac{1}{z}$ =

$$(z^2 + 1)^{2n} = 1 + 2n z^2 + \dots + 2n C_n z^{2n} + \dots$$

より $\text{Res} = 2n C_n$

$$I = 2\pi i \times \frac{1}{i 2^{2n}} \times \text{Res}[f, z=0]$$

$$= \frac{2\pi}{2^{2n}} 2n C_n$$

② $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ 型

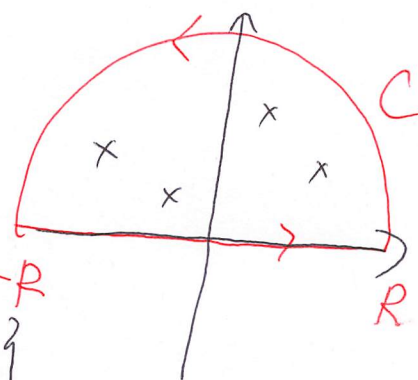
次の2条件をみたすとおく

① f は実軸上に極がない

② $z f(z) \rightarrow 0 \quad (\forall z \rightarrow \infty)$

$$C_R = \int_{-R}^R dx + \int_R^{-R} \frac{1}{z} dz = C \text{ を考える}$$

上半面
(もしくは下半面)



$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \underbrace{\int_C f(z) dz}_{2\pi i \text{Res}} - \underbrace{\int_{C_R} f(z) dz}_{zf(z) \rightarrow 0 \text{ より } R \rightarrow \infty \text{ で } 0 \text{ に近づく}} \right\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_n \text{Res}[f, a_n]$$

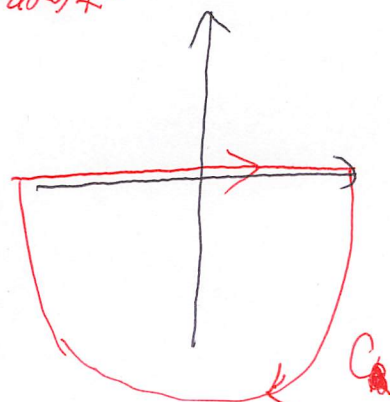
上半面での留数の和

ちなみに教科書にはないが、下半面でやってもよい。

C は逆向きの path で留数定理を使うときに (-1) がよくここに注意し

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = -2\pi i \sum_n \text{Res}[f, a_n']$$

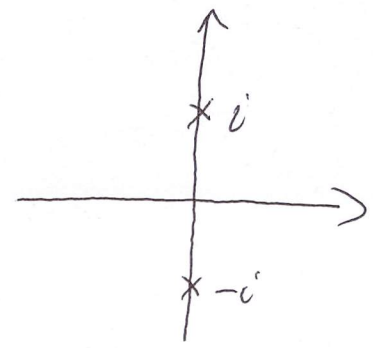
下半面での留数の和



例5.5.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{(x+i)(x-i)}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Res}[f, i] = \frac{1}{2i} \Rightarrow I = 2\pi i \times \text{Res} = \pi \quad \text{上半面} \\ \text{Res}[f, -i] = -\frac{1}{2i} \Rightarrow I = -2\pi i \times \text{Res} = \pi \quad \text{下半面} \end{array} \right.$$

となり、どちらをやっても同じ値になる。

例題5.7.

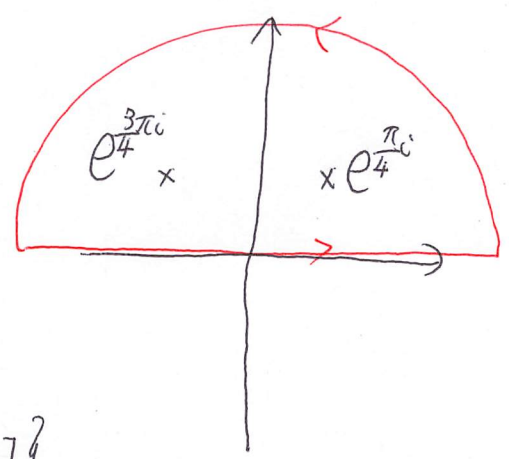
$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$$

偶関数: \$x>0\$ でも \$x<0\$ でも同じ

\$\therefore -\infty \sim \infty\$ に広げて
複素積分をしやすいようにする

$$f(z) = \frac{1}{z^4+1} \text{ の極は}$$

$$z = \underbrace{e^{\frac{\pi i}{4}}, e^{\frac{3\pi i}{4}}}_{\text{上半面}}, e^{\frac{5\pi i}{4}}, e^{\frac{7\pi i}{4}}$$



\$f(z) \times z \rightarrow 0\$ @ \$z \rightarrow \infty\$ より半円積分も0になり、

$$I = \pi i \left\{ \text{Res}[f, e^{\frac{\pi i}{4}}] + \text{Res}[f, e^{\frac{3\pi i}{4}}] \right\}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \pi \quad \text{例題 5.3 参照}$$

③ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx \quad (\lambda > 0)$ 型

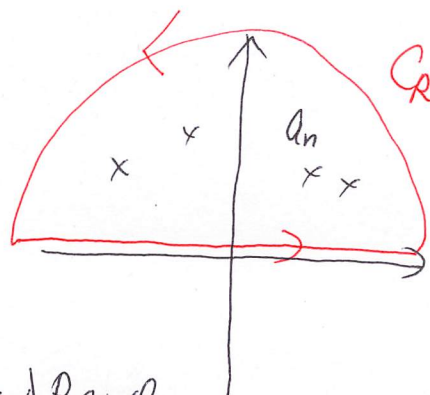
条件 ① $f(z)$ が実数域に極をもたない

② $zf(z) \rightarrow 0$ または

$|zf(z)| \leq M \quad z \rightarrow \infty$
ジョルダンの補助定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \left\{ \int_C - \int_{C_R} \right\}$$

今回は必ず上半面



C_R について, $z = Re^{i\theta} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$

$$|e^{i\lambda z}| = |e^{i\lambda R(\cos\theta + i\sin\theta)}| = e^{-\lambda R \sin\theta}$$

より $R \rightarrow \infty$ で非常に小さくなる $\Rightarrow \int_{C_R} f(z) e^{i\lambda z} dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$

従って

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx = \int_C f(z) e^{i\lambda z} dz = 2\pi i \sum_n \text{Res}[f, a_n]$$

上半面の留数の和

※注意: 下半面では

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx \neq -2\pi i \sum_n \text{Res}[f, a_n']$$

④ 下半面で C_R をとると

$$|e^{i\lambda z}| = e^{-\lambda R \sin\theta} \quad \pi \leq \theta \leq 2\pi$$

$$= e^{+\lambda R |\sin\theta|} \rightarrow \infty$$

となり発散!! $\int_{C_R} f(x) e^{i\lambda x} dx \neq 0$

$e^{i\lambda x}$ 項の符号に注意に上か下かを判断!

図例題 5.8

5-2-5

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos bx}{x^2 + a^2} dx \quad a, b > 0$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ibx}}{x^2 + a^2} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ibx}}{x^2 + a^2} dx \right]$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2} \quad \text{は} \quad |zf(z)| \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0 \quad \text{で} \quad z = \pm ai \text{ に極を1つ}$$

(第一項) : 上半面 に半円を描く : $2\pi i \operatorname{Res}[f, ai]$

(第二項) : 下半面 に半円を描く : $-2\pi i \operatorname{Res}[f, -ai]$

$$\Rightarrow I = \pi i \left[\underbrace{\operatorname{Res}[f, ai]}_{\frac{1}{2ai} e^{-ba}} - \underbrace{\operatorname{Res}[f, -ai]}_{-\frac{1}{2ai} e^{-ba}} \right]$$

$$= \frac{\pi}{a} e^{-ba}$$

ちなみに $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx \quad \lambda > 0$ 型が出現し、 λ の符号が
下半面が半円を描く

$$I^* = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) e^{+i\lambda x} dx$$

つまりは上半面を描くといふ関数になり、 λ の符号が
面図に反映する!

例題 5.9

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sinh bx}{x^2 + a^2} dx \quad a, b > 0$$

$$= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(e^{ibx} - e^{-ibx})}{x^2 + a^2} dx$$

$$= \frac{1}{2i} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ibx}}{x^2 + a^2} dx - \text{c.c.} \right]$$

第一項の複共役

ここで $f(z) = \frac{z}{z^2 + a^2}$ は $|zf(z)| \leq M$ for $z \rightarrow \infty$

上半面積分がちゃんと 0 に収束するので、上半面の極 $z = +ai$ の留数を使って

$$I = \frac{1}{2i} \left[2\pi i \operatorname{Res}[f(z)e^{ibz}, ai] - \text{c.c.} \right]$$

$$= \frac{1}{2i} \left[2\pi i \times \frac{ai e^{-ba}}{2ai} - \text{c.c.} \right]$$

$$= \frac{1}{2i} \left[i\pi e^{-ba} - \text{c.c.} \right]$$

$$= \pi e^{-ba}$$

※ c.c. を使わずとも $\operatorname{Res}[f(z)e^{ibz}, -ai] \times (-2\pi i)$ を足せばいい。

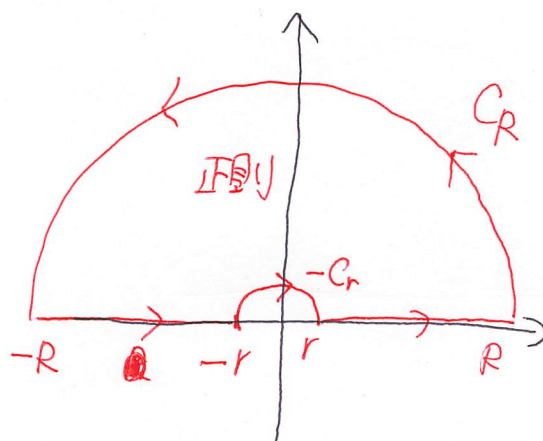
④ その他の積分

例題 5.10 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ が $|f(z) \times z| = 1$ とおきこむと、 $z=0$ に極がある!

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_R} + \int_{-R}^{-r} + \int_{-r}^r + \int_r^R$$

コシーの
定理
= 0



C_R 積分は 0 に近づく for $R \rightarrow \infty$

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \int_0^{\pi} |e^{iR(\cos \theta + i \sin \theta)}| d\theta = e^{-R \sin \theta}$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta$$

$R \rightarrow \infty$ でほぼ 0

$\rightarrow 0$

一方 C_r 積分は

$$\int_{-C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = -i \int_0^{\pi} e^{i r e^{i\theta}} d\theta \Rightarrow -i\pi$$

$r \rightarrow 0$ で 1 に近づく

一方

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx = 2i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx$$

$$\Rightarrow 2i \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = i\pi, \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} //$$

コーシーの主値積分公式

別解

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{x \mp i\varepsilon} = \underbrace{P \frac{1}{x}}_{\text{主値}} \pm i\pi \delta(x)$$

主値: ここに極があっても、無視して、という意味

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sinh x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh x}{x} dx = \frac{1}{4i} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{P \frac{e^{ix}}{x}}_{\substack{\uparrow \\ x=0 \text{で発散する極がある!!}}} - P \frac{e^{-ix}}{x} \right]$$

 $x=0$ で発散する極がある!!ゆえにまだ P をつけて4分してやる

$$I = \frac{1}{4i} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{P \frac{1}{x}}_{\text{主値}} e^{ix} - c.c. \right]$$

$$= \frac{1}{x+i\varepsilon} + i\pi \delta(x) : \text{主値積分公式}$$

$$= \frac{1}{4i} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{\underbrace{x+i\varepsilon}_{\substack{\text{上半面正則} \\ \text{ゆえに留数積分0}}}} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{i\pi \delta(x)}_{= i\pi} e^{ix} dx \right] - c.c.$$

$$= \frac{1}{4i} \left[i\pi - (-i\pi) \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} //$$

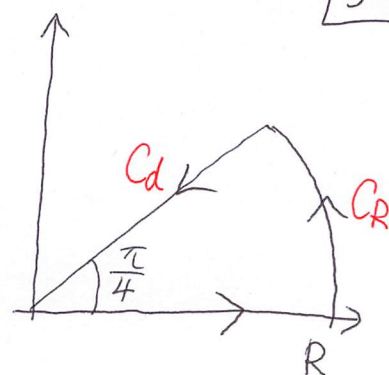
例題 5.11 フーリエ積分

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$f(z) = e^{-z^2}$: 正則関数

15-2-9

$$\int_0^R e^{-x^2} dx + \int_{C_R} e^{-z^2} dz + \int_{C_d} e^{-z^2} dz = 0 \quad \text{コーシーの定理}$$



$\therefore R \rightarrow \infty$ のとき

$$\left| \int_{C_R} e^{-z^2} dz \right| \leq \int_0^{\pi/4} \underbrace{|e^{-z^2}|}_{= e^{-R^2 \cos 2\theta}} R d\theta \rightarrow 0$$

$$\int_0^R e^{-x^2} dx \rightarrow \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Rightarrow \int_{C_d} e^{-z^2} dz \rightarrow -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_{C_d} e^{-z^2} dz = - \int_0^R \underbrace{[\cos t^2 - i \sin t^2]}_{\text{逆時計}} \frac{1+i}{\sqrt{2}} dt \quad \begin{aligned} z &= \frac{1+i}{\sqrt{2}} t \\ (0 \leq t \leq R) \\ z^2 &= i t^2 \end{aligned}$$

以上より

~~実部~~

$$\int_0^\infty (\cos t^2 - i \sin t^2) dt = \frac{1-i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{実部: } \cos t^2 \text{ の フレグメント} \\ \text{虚部: } \sin t^2 \text{ の } \end{array} \right.$