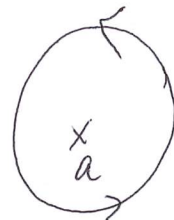


(1) 留数, 複素積分

① 留数 Residue

$$\text{Res}[f, a] = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(z) dz$$

関数 f の $z=a$ 周りの留数



C_r : 半径 r の円

→ $z=a$ を囲む何か

図定理 5.1

$f: 0 < |z-a| < R$ で正則

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \dots$$

と展開できるとき,

$$\text{Res}[f, a] = a_{-1} \quad ; \quad \frac{1}{z-a} \text{ の項の係数}$$

証明

例題 3.3

$$\int_{C_r} (z-a)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & (n=-1) \\ 0 & (n \neq -1) \end{cases} \quad \text{より明らか}$$

(c.f.) $z=a$ で f が正則なら $a_{-1}=0 \Rightarrow \int_{C_r} f(z) dz = 0$ コーシーの積分定理

(例) $f(z) = z^n e^{1/z} \quad n \in \mathbb{N}$

$$= z^n + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{z} + \dots$$

↑ $\text{Res}[f, z=0]$

★ 留数積分や定積分の値を計算するための大事な量.

定理 5.2

(i) $z=a$ が f の 1 位の極

$$\text{Res}[f, a] = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z)$$

(ii) $z=a$ が f の m 位の極

$$\text{Res}[f, a] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)]$$

証明

(i) $f(z) = \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \dots$ とローラン展開

$\Rightarrow \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = a_{-1} = \text{留数}$

(ii) $f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + \dots$ とローラン展開

$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)] = (m-1)! a_{-1} + O(z-a) \rightarrow (m-1)! \times \text{Res}$

例題 5.1

$f(z) = \frac{z^2+1}{z(z-i)^3}$ の $z=0, i$ での留数は

$\text{Res}[f, 0] = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = -i$, $\text{Res}[f, i] = \lim_{z \rightarrow i} (z-i)f(z) = \infty$

正しくは (ii) を使うと、 $(m=2)$

$\text{Res}[f, i] = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} [(z-i)^2 f(z)]$
 $= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left(1 + \frac{i}{z} \right)$
 $= i$

(i) を使おうとすると...

2 位の極だから

$f(z) = \frac{z+i}{z(z-i)^2}$

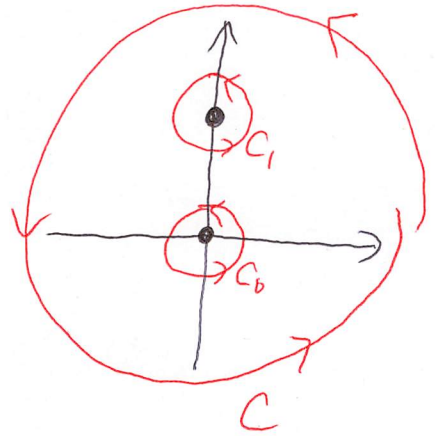
これを使うと.

$$\int_{C_0} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f, 0] = 2\pi$$

$\sim z=0$ まわり

$$\int_{C_1} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f, i] = -2\pi$$

$\sim z=i$ まわり



$$\int_C f(z) dz = \int_{C_0+C_1} = 0$$

$\sim z=0, i$ を両方囲む大きな円周

例5.2 $f(z) = \frac{z^2}{(2z-1)^2}$ の $z=\frac{1}{2}$ は2位の極

$$\operatorname{Res}\left[f, \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{d}{dz} \left[\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{z^2}{(2z-1)^2} \right] = \frac{1}{4}$$

例5.3 $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^4}$ $\therefore z=0$ が3位の極

$$f(z) = \frac{z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{4!}z^4 + \dots}{z^4}$$

直接ローラン展開するのが楽なこともあるよ.

$$\therefore a_{-1} = \frac{1}{3!} = \operatorname{Res}[f, 0]$$

定理5.3

$F, G: z=a$ で正則, $F(a) \neq 0$

$G(z)$ は a で1位のゼロ点

$$\Rightarrow \operatorname{Res}\left[\frac{F}{G}, a\right] = \frac{F(a)}{G'(a)}$$

証明 定理4.10 より, $z=a$ で正則な Q を用いて

$$G(z) = (z-a)Q(z), \quad Q(a) \neq 0$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{F}{G}, a\right] = \operatorname{Res}\left[\frac{F(z)}{(z-a)Q(z)}, a\right] \stackrel{1\text{位}}{=} \lim_{z \rightarrow a} \frac{(z-a)F(z)}{(z-a)Q(z)} = \frac{F(a)}{Q(a)} = \frac{F(a)}{G'(a)}$$

極の位数がよくなるから関数でも安心!!

15-4

定理 A.1

$$\text{Res}[f, a] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-a)^n f(z)]$$

for n if 左辺が収束

デキトに大抵 n で a は OK

証明

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \dots$$

とローラン展開

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-a)^n f(z)] = \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\dots + \frac{a_{-n}}{z-a} + a_{-n+1} + \dots + a_{-1} (z-a)^{n-1} + \dots \right]$$

$$= \left[\dots + \frac{(-1)^n (n-1)! a_{-n}}{(z-a)^n} + \dots + (n-1)! a_{-1} + \dots \right]$$

よ、こ

$$(\text{右辺}) = \dots + \lim_{z \rightarrow a} \frac{(-1)^n a_{-n}}{(z-a)^n} + \dots + a_{-1}$$

もし a_{-n} が 0 なら 0

もし a_{-n} が ∞ なら ∞

よ、こ (右辺) が発散なら n が足りない。 n が大抵 ∞ 収束する $a_{-1} = \text{Res}$

例題 5.1

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z(z-i)^3} = \frac{z+i}{z(z-i)^2}$$

$$\frac{d}{dz} [(z-i)^2 f(z)] = \frac{d}{dz} \left(\frac{z+i}{z} \right) = -\frac{i}{z^2} \rightarrow i$$

大抵 i であらう

n でデキトに

計算できる!!!

$$\frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} [(z-i)^3 f(z)] = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{z^2+1}{z} \right) = \frac{1}{2!} \left(\frac{2}{z^3} \right) \rightarrow i$$

$$\frac{1}{3!} \frac{d^3}{dz^3} [(z-i)^4 f(z)] = \frac{1}{3!} \frac{d^3}{dz^3} \left(\frac{(z^2+1)(z-i)}{z} \right) \Rightarrow \frac{1}{3!} \frac{d^3}{dz^3} \left(-\frac{i}{z} \right) = \frac{1}{3!} \cdot \frac{6i}{i^4} = i$$

② 留数定理

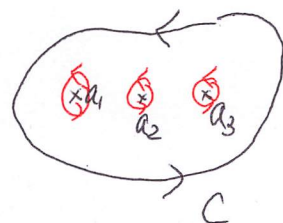
15-5

図定理 5.4 **留数定理** コーシーの特分^{定理}の特異点がある ver

D : 単純閉曲線 C で囲まれた領域

f : D 上で孤立特異点 $a_1, a_2, \dots, a_n$ を除いて正則

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \sum_{n=1}^n \text{Res}[f, a_n]$$



証明 定理 3.6 と 留数の定義より自明。

- 特異点のない正則関数 $\Rightarrow$ コーシーの特分定理で $\int_C f dz = 0$
- 特異点ある関数 $\Rightarrow$ そのまわりの留数分だけ非ゼロの値

図例 5.4 $I = \int_C \frac{z}{(z-1)(z+3)} dz$ $C: |z|=2$ の円周

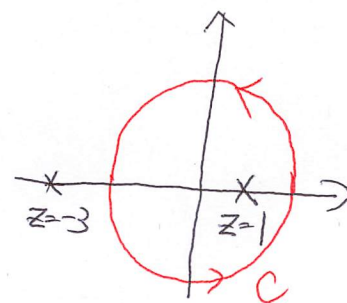
方法①

$$I = \int_C \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{z-1} + \frac{3}{z+3} \right\} dz$$

$\xrightarrow{2\pi i}$

3×0

コーシーの特分定理
($\because$ 例題 3.4, 3.5)



$$= \frac{1}{4} \times 2\pi i = \frac{\pi}{2} i$$

方法②

$$I = \int_C \frac{1}{z-1} \times \frac{z}{z+3} dz \xrightarrow{\text{コーシーの特分公式 定理 3.7}} = 2\pi i \left[\frac{z}{z+3} \right]_{z=1} = \frac{\pi}{2} i$$

方法③

留数定理より

$$I = 2\pi i \text{Res}[f, 1] = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)f(z) = \frac{\pi}{2} i$$

どれでもいいが、留数定理を使ってやるのが一番ラク!

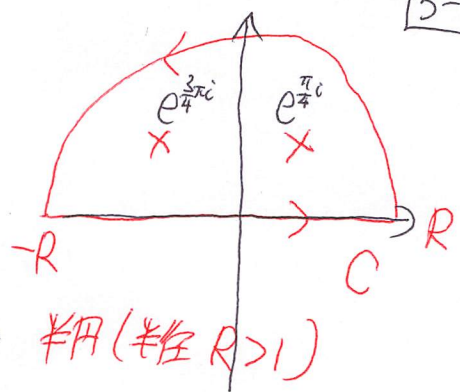
図例題 5.3

15-6

$$I = \int_C f(z) dz = \int_C \frac{dz}{z^4 + 1}$$

まず $f(z)$ の正則性・特異点について: 以下の点以外正則

$$z^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow z = e^{\frac{\pi i}{4}}, e^{\frac{3\pi i}{4}}, e^{\frac{5\pi i}{4}}, e^{\frac{7\pi i}{4}} \quad \text{半円 (半径 } R > 1)$$



留数定理より

↑ このうち $e^{\frac{\pi i}{4}}, e^{\frac{3\pi i}{4}}$ が C の中にある。1位の極

$$I = 2\pi i \left\{ \text{Res}[f, e^{\frac{\pi i}{4}}] + \text{Res}[f, e^{\frac{3\pi i}{4}}] \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(e^{\frac{\pi i}{4}} - e^{\frac{3\pi i}{4}})(e^{\frac{\pi i}{4}} - e^{\frac{5\pi i}{4}})(e^{\frac{\pi i}{4}} - e^{\frac{7\pi i}{4}})} &= \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{2}} \times \left(\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{i2}{\sqrt{2}}\right) \times \frac{i2}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{-1-i}{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

同様に (2) $\text{Res}[f, e^{\frac{3\pi i}{4}}] = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow I = 2\pi i \left\{ \frac{-1-i}{4\sqrt{2}} + \frac{1-i}{4\sqrt{2}} \right\} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

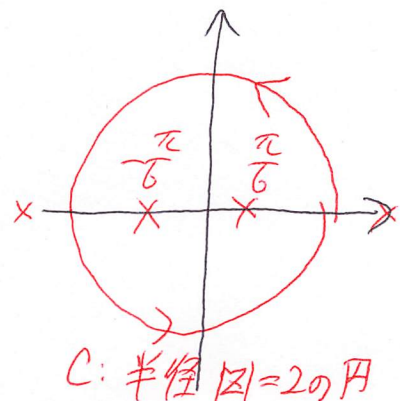
図例題 5.4

$$I = \int_C f(z) dz = \int_C \frac{z}{4\sinh^2 z - 1} dz$$

特異点について: $4\sinh^2 z - 1 = 0$, $\sinh z = \pm \frac{1}{2}$

$$z = \pm \frac{\pi}{6} + n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

↑ このうち $\pm \frac{\pi}{6}$ のみが C 内。1位の極



$$I = 2\pi i \left\{ \text{Res}[f, \frac{\pi}{6}] + \text{Res}[f, -\frac{\pi}{6}] \right\}$$

[5-7]

$$\text{Res} \left[f, \frac{\pi}{6} \right] = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{6}} \left[\frac{z - \frac{\pi}{6}}{\left(\sinh z - \frac{1}{2} \right)} \times \frac{z}{4 \left(\sinh z + \frac{1}{2} \right)} \right] = \frac{\pi}{12\sqrt{3}}$$

$\Rightarrow \frac{1}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}/2} \quad \Rightarrow \frac{\frac{\pi}{6}}{4 \times 1}$

$\text{Res} \left[f, -\frac{\pi}{6} \right]$ も同様に $\frac{\pi}{12\sqrt{3}}$ となり.

$$I = 2\pi i \times \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

問 5.5 (1)

$$I = \int_C \frac{z}{(z+2)(z-1)} dz \quad C: |z|=3$$

特異点左り: $z=1, -2$ に 1 位の極。両方 C 内なので

$$I = 2\pi i \left\{ \text{Res} \left[f, 1 \right] + \text{Res} \left[f, -2 \right] \right\}$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{z+2} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{z \rightarrow -2} \frac{z}{z-1} = \frac{2}{3}$$

$$I = 2\pi i$$

まとめ

留数積分
のやり方

- ① $f(z)$ の特異点左り.
- ② そのうちどれが C の内部にあり.
- ③ そのつらの Res を計算.
- ④ 留数の定理で出す.