複素関数論（担当：遠藤）練習帳

2024/3/6 修正版（2023 年度まで同授業担当の大淵先生の資料を基に編集・改訂）

初めに

本講義の最も実用的な目標は複素積分による「定積分の計算」(教科書 5.2) である。そのためには複素数を変数とする複素数値の関数である「複素関数」(第２章) の積分である「複素積分」(第３章) を理解する必要がある。中でも「正則関数」(2.2.2) が持つ著しい性質である「Cauchy の積分定理」(3.1.7)、Taylor 級数展開の拡張である「Laurent 級数展開」、「極」(4.5.2)、「留数」と「留数定理」(5.1) などの概念が重要となる。これらを理解すると、不定積分ができないのに定積分ができる関数が広く存在することが分かる。5.2 に現れる被積分関数は初等的なものであるが、それらの定義域を複素数に拡張した場合の振る舞いも理解しなければならないが (2.3)、まずは複素数の様々な取り扱い方から始める (第１章)。

上記の説明は講義が終わる頃になって分かることですが、１つずつの事柄が目標に向けて一歩ずつ進むため順序立てて積み上げられています。

この講義の最終目標は、複素関数の微積分を使いこなし、計算をできるようになることです。そのため、講義を聞くだけでなく、教科書の問題などを自分の力で解いて計算してみることが非常に重要になります。この「練習帳」は教科書の問や章末の演習問題の解答を教科書の巻末の解答より詳しく与えています。まずはこれらの模範解答を見ずに自力で教科書の問題を解いてみて、出来なかった際にのみ以下の解答を確認して、学修に活かしてください。（決して、問題に自力で取り組まずにこちらの解答をただ眺めただけで勉強したつもりにはならないようお願います。）

第１章

問 1.1　例 1.1 の真似をする。

(1)
$$(2-i)(5+2i) = 10+2+i(4-5) = 12-i$$

(2)
$$\frac{i}{1+i}+\frac{1-i}{i} = \frac{i(1-i)}{2}-i(1-i) = \frac{1+i}{2}-1-i = -\frac{1+i}{2}$$

(3)
$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 = \left(\frac{(1-i)^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{-2i}{2}\right)^2 = -1$$

問 1.2　$a,b\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$ 例 1.2 の真似をする。

(1)
$$\overline{a^n-(\overline{a})^n} = (\overline{a})^n-a^n = -\left(a^n-(\overline{a})^n\right)$$

より $a^n-(\overline{a})^n$ は純虚数

(2)
$$\overline{a\overline{b}+\overline{a}b} = \overline{a}b+a\overline{b} = a\overline{b}+\overline{a}b$$

より $a\overline{b}+\overline{a}b$ は実数

問 1.3 例題 1.1 の真似をする。

(1)
$$\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

(2)
$$1-i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

(3)
$$2\sqrt{3}-2i = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right) = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

(4)
$$-3+4i = 5\left(-\frac{3}{5}+i\frac{4}{5}\right) = 5\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right) = \pi-\tan^{-1}\frac{4}{3}$$

問 1.4 (例年であれば講義中に証明)

$$\begin{aligned}
|z_1\pm z_2|^2 &= (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) = |z_1|^2+|z_2|^2+\pm(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)\\
&= |z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}z_1\overline{z_2} \le |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1\overline{z_2}| = (|z_1|+|z_2|)^2\\
\therefore\ |z_1\pm z_2| &\le |z_1|+|z_2|
\end{aligned}$$

最後の不等式で z_1 を $z_1\mp z_2$ で置き換えると

$$\begin{aligned}
|z_1| &\le |z_{\mp}z_2|+|z_2|\\
\therefore |z_1|-|z_2| &\le |z_1\pm z_2|
\end{aligned}$$

z_1 と z_2 を入れ替えると

$$\begin{aligned}
|z_2|-|z_1| &\le |z_2\pm z_1| = |z_1\pm z_2|\\
\therefore |z_2|-|z_1| &\le |z_1\pm z_2|\\
\therefore ||z_1|-|z_2|| &\le |z_1\pm z_2|
\end{aligned}$$

問 1.5 (例年であれば講義中に証明)
式 (1.8), (1.9) より $\angle P_2OP_1 = \arg(z_1/z_2) = \arg z_1 - \arg z_2 \ \pm\pi/2$. よって $\theta_2 - \theta_1 = \pm\pi/2$ 例題 1.2 より

$$z_1\overline{z_2} \;=\; r_1r_2\left\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\right\} \;=\; \pm i r_1 r_2$$

逆に $z_1\overline{z_2}$ が純虚数であれば $\theta_1-\theta_2=\pi/2+n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$ より $\angle P_2OP_1 = \arg(z_1/z_2) = \pi/2+n\pi$

問 1.6

$$z_0 \;=\; \frac{z_1+z_2}{2} \;=\; 2+3i$$

垂直二等分線について教科書とは別の素朴な解法を与えておく。z_1, z_2 に対応する 2 点を結ぶ直線の傾きは $\dfrac{5-1}{3-1}=2$ なのでそれに垂直な直線の傾きは $-1/2$ この直線が z_0 を通るためには

$$y-3 \;=\; -\frac{1}{2}(x-2)$$

これが $z=\alpha+i\beta$ と書けるとすると

$$\begin{aligned}\beta-3 &= -\frac{1}{2}(\alpha-2)\\ \alpha+2\beta-8 &= 0\end{aligned}$$

問 1.7

(1)
$$\begin{aligned}(1+i)^{11} &= \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{11} = 2^{11/2}\left(\cos\frac{11\pi}{4}+i\sin\frac{11\pi}{4}\right)\\ &= 2^{11/2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2^{11/2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2^5(-1+i)\\ &= 32(-1+i)\end{aligned}$$

(2)
$$(\sqrt{3}+i)^{-6} = \left(2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right)^{-6} = 2^{-6}\left(\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)\right) = -\frac{1}{64}$$

(3)
$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^8 &= \left(\frac{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right)^8 = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^8\\ &= \cos\left(-\frac{8\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{8\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

問 1.8

(1)
$$\begin{aligned}z^2 &= i = \cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\\ z &= \cos\frac{\pi/2+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\pi/2+2k\pi}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right) \quad (k=0,1)\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}z^3 &= -1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\\ z &= 2^{1/6}\left(\cos\frac{3\pi/4+2k\pi}{3}+i\sin\frac{3\pi/4+2k\pi}{3}\right)\\ &= 2^{1/6}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right) \quad (k=0,1,2)\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}z^5 &= -32 = 2^5\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)\\ z &= 2\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{5}\right) \quad (k=0,1,2,3,4)\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}z^4 &= \sqrt{3}-i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\\ z &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{-\pi/6+2k\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi/6+2k\pi}{4}\right)\\ &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\right)\right) \quad (k=0,1,2,3)\\ &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\right)\right) \quad (k=0,1,2,3)\end{aligned}$$

問 1.9 a の n 乗根を $\omega_0, \cdots, \omega_{n-1}$ とすると

$$z^n - a \;=\; (z-\omega_0)(z-\omega_1)\cdots(z-\omega_{n-1}) \;=\; 0$$

z^{n-1} の係数は $\omega_0+\omega_1+\cdots+\omega_{n-1}=0$, z^0 の係数は $(-1)^n\omega_0\omega_1\cdots\omega_{n-1}=-a$ よって

$$\begin{aligned}\omega_0+\omega_1+\cdots+\omega_{n-1} &= 0\\ \omega_0\omega_1\cdots\omega_{n-1} &= (-1)^{n-1}a\end{aligned}$$

問 1.10 講義中に証明
問 1.11 $z_{n+1}-z_n=a(z_n-z_{n-1})$ に対して、$w_n=z_{n+1}-z_n$ と置くと、$w_n=aw_{n-1}=a^nw_0$ よって

$$z_n \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} w_k + z_0 \;=\; w_0\sum_{k=0}^{n-1} a^k + z_0 \;=\; w_0\frac{1-a^n}{1-a}+z_0 \to \frac{z_1-az_0}{1-a}$$

問 1.12 項が複素数であっても等比数列の和の公式は変わらない。

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} r^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(r\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^n\\ &= \frac{1}{1-r(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-(1+i)r}\end{aligned}$$

演習問題

1,2 は省略
3. (1)-(5) は省略

(6) $z^6+z^3+1=0$ を z^3 の 2 次方程式と見て解くと

$$z^3 \;=\; \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2} \;=\; \cos\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)$$

さらに z について解くと

$$z \;=\; \cos\left(\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)\quad (k=0,1,2)$$

4. $\omega=\cos(2\pi/n)+i\sin(2\pi/n)$ は 1 の n 乗根である。

(1)
$$(z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{n-1}) \;=\; z^n-1 \;=\; 0$$

より z^{n-1} の係数を比較して

$$\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1} \;=\; -1$$

(2)
$$\frac{1}{1-\omega}+\frac{1}{1-\omega^{n-1}} \;=\; \frac{2-\omega-\omega^{n-1}}{(1-\omega)(1-\omega^{n-1})} \;=\; \frac{2-\omega-\omega^{n-1}}{2-\omega-\omega^{n-1}} \;=\; 1$$

(3)
$$S \;\equiv\; \frac{1}{1-\omega}+\frac{1}{1-\omega^2}+\cdots+\frac{1}{1-\omega^{n-1}}$$

$$\frac{1}{1-\omega^k}+\frac{1}{1-\omega^{n-k}} \;=\; \frac{2-\omega^k-\omega^{n-k}}{(1-\omega^k)(1-\omega^{n-k})} \;=\; 1$$

より n が奇数であれば $S=(n-1)/2$、n が偶数であれば $S=(n-2)/2+1/(1-\omega^{n/2})$。$n$ が偶数である時

$$\omega^{n/2} \;=\; \cos\pi+i\sin\pi=-1$$

なので $S=(n-2)/2+1/2=(n-1)/2$。従って、何れの場合でも $S=(n-1)/2$

(4)
$$\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{4\pi}{n}+\cdots\sin\frac{2(n-1)\pi}{n} \;=\; \mathrm{Im}\,(\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1}) \;=\; 0$$

5.

(1) $$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 \;=\; 2(|z_1|^2+|z_2|^2)+z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2-z_1\overline{z}_2-\overline{z}_1z_2 \;=\; 2(|z_1|^2+|z_2|^2)$$

(2) $$\begin{aligned} |1-\overline{z}_1z_2|^2-|z_1-z_2|^2 &= 1-\overline{z}_1z_2-z_1\overline{z}_2+|z_1|^2|z_2|^2-(|z_1|^2+|z_2|^2-z_1\overline{z}_2-\overline{z}_1z_2) \\ &= (1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2) \;>\; 0 \;\;(\because\;|z_1|<1,|z_2|<1) \end{aligned}$$

$\therefore$

$$\begin{aligned} |z_1-z_2|^2 &< |1-\overline{z}_1z_2|^2 \\ |z_1-z_2| &< |1-\overline{z}_1z_2| \end{aligned}$$

6. 教科書には数カ所間違いがある。
$P(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$ に対して $M=\max\{||a_0,||a_1|,\cdots,|a_{n-1}|,1\}$ と置く。

(1) $$|P(z)| \;\le\; |z|^n+|a_{n-1}||z|^{n-1}+\cdots+|a_1||z|+|a_0| \;\le\; M(|z|^n+|z|^{n-1}+\cdots+|z|+1)$$

仮定により $|z|\ge 2$ なので

$$|z|^{n-k} \;=\; \frac{|z|^n}{|z|^k} \;\le\; \frac{|z|^n}{2^k}$$

従って、

$$|P(z)| \;\le\; M|z|^n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right) \;\le\; 2M|z|^n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) \;<\; 2M|z|^n$$

(2) (1) と仮定により

$$|P(z)| \;<\; 2M|z|^n \;\le\; |z|^{n+1}/2$$

7. $z^3+az^2+bz+c=0$ に $z=iy$ を代入すると

$$-iy^3-ay^2+iby+c \;=\; 0$$

実部、虚部に分けると

$$\begin{aligned} ay^2-c &= 0 \\ y^3-by &= 0 \end{aligned}$$

$y=0$ とすると $c=0$ となり、仮定に反する（純虚数解とも言い難いが)。$y\ne 0$ であれば $y^2=b$ で

$$\begin{aligned} ab-c &= 0 \\ y &= \pm\sqrt{b} \end{aligned}$$

この時、残りの 2 つの解は $-a$, $-iy$ である。3 つの解の和は $-a$ であり、積は $-ay^2=-ab=-c$ である。

第2章

問 2.1 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とすると $w=z^4=r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)$ なので $r\le 2$, $0\le\theta\le\pi/2$ とすると $|w|\le 16$ (原点を中心とする半径 16 の円)

問 2.2

(1) $$|w| \;=\; \frac{1}{|z|} \;>\; \frac{1}{r}$$

(2) w が実数になるのは $y=0$, $y=\pm\infty$ の時のみで、それぞれ $w=1/\alpha$, $w=0$。この事から中心が $1/2\alpha$、半径が $1/2|\alpha|$ であることが予想できる。$\mathrm{Im}z=y$ と置くと

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{\alpha+iy} \\ \left|w-\frac{1}{2\alpha}\right| &= \left|\frac{2\alpha-(\alpha+iy)}{2\alpha(\alpha+iy)}\right| \;=\; \left|\frac{\alpha-iy}{2\alpha(\alpha+iy)}\right| \;=\; \frac{1}{2|\alpha|} \end{aligned}$$

(3) (2) と同様に考えることができる。Re$z = x$ と置くと

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{x+i\beta} \\ \left|w + \frac{i}{2\beta}\right| &= \left|\frac{2\beta + i(x+i\beta)}{2\beta(x+i\beta)}\right| = \left|\frac{i(x-i\beta}{2\beta(x+i\beta)}\right| = \frac{1}{2|\beta|} \end{aligned}$$

問 2.3 講義中に証明
問 2.4

(1)
$$\lim_{z\to 1}\frac{z^3-1}{z-1} = \lim_{z\to 1}(z^2+z+1) = 3$$

(2)
$$\lim_{z\to i}\frac{z}{z^2+1} = \infty$$

(3)
$$\lim_{z\to i}\frac{z^2+iz+2}{z-i} = \lim_{z\to i}(z+2i) = 3i$$

(4)
$$\lim_{z\to\infty}\frac{1+z^2}{1-z^2} = -\lim_{z\to\infty}\frac{1+1/z^2}{1-1/z^2} = -1$$

問 2.5 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と置くと

$$\lim_{z\to 0}\frac{z^n}{\overline{z}^n} = \lim_{r\to 0}\frac{\cos n\theta + i\sin n\theta}{\cos n\theta - i\sin n\theta} = \lim_{r\to 0}(\cos 2n\theta + i\sin 2n\theta)$$

$n \neq 0$ の時、極限値無し。$n = 0$ の時は極限値 1 を持つ。

問 2.6 関数を実部、虚部に分けて、定理 2.4 を用いるだけ。

問 2.7 定理 2.4 より明らか。

問 2.8 講義中に証明

問 2.9 例 2.6、定理 2.5 を応用する練習。実数の場合と定義が同じなので演算としても同じ。

(1)
$$f'(z) = \left(z^3\right)' + 2i\left(z^2\right)' = 3z^2 + 4iz$$

(2)
$$f'(z) = 2\left(z^2 - 3iz - 2\right)\left(z^2 - 3iz - 2\right)' = 2\left(z^2 - 3iz - 2\right)(2z - 3i)$$

(3)
$$f'(z) = \frac{2z(z+i) - (z^2 - 3i)}{(z+i)^2} = \frac{z^2 + 2iz + 3i}{(z+i)^2}$$

(4)
$$f'(z) = 3\left(\frac{iz-2}{iz+2}\right)^2\left(\frac{iz-2}{iz+2}\right)' = 3\left(\frac{iz-2}{iz+2}\right)^2\frac{i(iz+2) - (iz-2)i}{(iz+2)^2} = \frac{12i(iz-2)^2}{(iz+2)^4}$$

問 2.10 Cauchy-Riemann の関係式が成立しないことを確認する。当然、実部だけ、虚部だけの関数は微分不可能である。

(1)
$$\begin{aligned} u &= x^2 + y^2, \quad v = 2xy \\ u_x &= 2x, \quad u_y = 2y \\ v_x &= 2y, \quad v_y = 2x \\ u_y &\neq -v_x \quad (y \neq 0) \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} u &= x^2 - y^2, \quad v = -2xy \\ u_x &= 2x, \quad u_y = -2y \\ v_x &= -2y, \quad v_y = -2x \\ u_x &\neq v_y, \quad u_y \neq -v_x \quad (z \neq 0) \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} u &= y, \quad v = 0 \\ u_x &= 0, \quad u_y = 1 \\ v_x &= 0, \quad v_y = 0 \\ u_y &\neq -v_x \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} u &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad v = 0 \\ u_x &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad u_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ v_x &= 0, \quad v_y = 0 \\ u_x &\neq v_y, \quad u_y \neq -v_x \end{aligned}$$

問 2.11 例題 2.6 で見たように z の関数でないと正則ではない。

問 2.12 $x = z - iy$ を代入して、同じの数の y を含む項の係数の実部、虚部が 0 であることを要求する。

(1)
$$\begin{aligned} f(z) &= (ax - 2y) + i(bx + y) = a(z - iy) - 2y + ib(z - iy) + iy \\ &= az + ibz + (b-2)y - i(a-1)y \\ a &= 1, \quad b = 2 \\ f(z) &= (1+2i)z \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} f(z) &= (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2) \\ &= (z - iy)^2 + a(z - iy)y + by^2 + ic(z - iy)^2 + id(z - iy)y + iy^2 \\ &= z^2 - 2izy - y^2 + azy - iay^2 + by^2 + icz^2 + 2czy - icy^2 + idzy + dy^2 + iy^2 \\ &= (1 + ic)z^2 + (-2i + a + 2c + id)zy + (-1 - ia + b - ic + d + i)y^2 \\ a + 2c &= 0, \quad d - 2 = 0, \quad b + d - 1 = 0, \quad a + c - 1 = 0 \\ a &= 2, \quad b = -1, \quad c = -1, d = 2 \\ f(z) &= (1 - i)z^2 \end{aligned}$$

問 2.13

(1)
$$\begin{aligned} u_x &= v_y = 2y + 1, \quad u_y = -v_x = 2x \\ u &= 2xy + x + g(y), \quad u_y = 2x + g'(y) = 2x, \quad g(y) = c \ (\text{実の定数}) \\ f &= 2xy + x + c + i(-x^2 + y^2 + y) = -iz^2 + z + c \end{aligned}$$

(2) $u_x = v_y = 3x^2 - 3y^2, \ \ u_y = -v_x = -1 - 6xy$

$$\begin{aligned} u &= x^3 - 3xy^2 + g(y), \ \ u_y = -6xy + g'(y) = -1 - 6xy, \ \ g(y) = -y + c \quad (c\text{ は実の定数}) \\ f &= x^3 - 3xy^2 - y + c + i(-y^3 + 3x^2y + x) = z^3 + iz + c \end{aligned}$$

問 2.14

(1)

$$U_{xx} + U_{yy} = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

(2)

$$\begin{aligned} V_x &= -U_y = u_y(x, -y) = -v_x(x, -y) \\ V_y &= U_x = u_x(x, -y) = v_y(x, -y) \\ V(x, y) &= -v(x, -y) + c \quad (c\text{ は実の定数}) \end{aligned}$$

問 2.15 $re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ を忠実に使う。

問 2.16 $re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ を忠実に使う。

問 2.17

(1) $\overline{e^z} = \overline{e^{x+iy}} = \overline{e^x e^{iy}} = \overline{e^x(\cos y + i\sin y)} = e^x(\cos y - i\sin y) = e^x e^{-iy} = e^{x-iy} = e^{\bar{z}}$

(2) $n = 0$, $n = 1$ の時、自明。k が正の整数で、$(e^z)^k = e^{kz}$ が成立していると仮定すると

$$(e^z)^{k+1} = (e^z)^k (e^z)^1 = e^{kz}e^z = e^{(k+1)z}$$

従って、$n = k + 1$ についても $(e^z)^n = e^{nz}$ が成立する。一方、$e^z e^{-z} = 1$ より $(e^z)^{-1} = e^{-z}$ なので $n = -1$ でも $(e^z)^n = e^{nz}$ が成立する。$n = k < 0$ でも成立すると仮定すると

$$(e^z)^{k-1} = (e^z)^k (e^z)^{-1} = e^{kz}e^{-z} = e^{(k-1)z}$$

よって $n = k - 1$ に対しても $(e^z)^n = e^{nz}$ が成立し、全ての整数 n に対して公式が成立する。

(3)

$$|e^z| = |e^x(\cos y + i\sin y)| = e^x = e^{\mathrm{Re}z}$$

問 2.18

(1)

$$\begin{aligned} e^z &= 1 + i = \sqrt{2}e^{\pi i/4} = e^x e^{iy} \\ e^x &= \sqrt{2}, \ \ y = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \\ x &= \frac{1}{2}\log 2 \\ z &= \frac{1}{2}\log 2 + i\left(\frac{1}{4} + 2n\right)\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} e^{2z} &= 1 + \sqrt{3}i = 2e^{\pi i/3} = e^{2x}e^{2iy} \\ e^{2x} &= 2, \ \ 2y = \frac{\pi}{3} + 2n\pi \\ x &= \frac{1}{2}\log 2, \ \ y = \frac{\pi}{6} + n\pi \\ z &= \frac{1}{2}\log 2 + i\left(\frac{1}{6} + n\right)\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

(3) $e^z \neq 0$ より

$$\begin{aligned} e^{2z} &= i = e^{\pi i/2} \\ x &= 0, \ \ 2y = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \ \ y = \frac{\pi}{4} + n\pi \\ z &= i\left(\frac{1}{4} + n\right)\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

問 2.19 合成関数の微分の公式を用いるため $az = w$ と置くと

$$\frac{d}{dz}e^{az} = \frac{dw}{dz}\frac{d}{dw}e^{w} = ae^{w} = ae^{az}$$

問 2.20

(1)
$$\cos 2i = \frac{e^{-2}+e^{2}}{2} = \cosh 2$$

(2)
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+i\right) = \cos i = \frac{e^{-1}+e^{1}}{2} = \cosh 1$$

(3)
$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{6}-3i\right) &= \cos\frac{\pi}{6}\cos(3i)+\sin\frac{\pi}{6}\sin(3i) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{e^{-3}+e^{3}}{2}+\frac{1}{2}\frac{e^{-3}-e^{3}}{2i}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cosh 3+\frac{i}{2}\sinh 3\end{aligned}$$

問 2.21

$$\begin{aligned}\cos z+i\sin z &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}+\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2} = e^{iz}\\ \cos(-z) &= \frac{e^{-iz}+e^{iz}}{2} = \cos z\\ \sin(-z) &= \frac{e^{-iz}-e^{iz}}{2i} = -\sin z\\ \cos^2 z+\sin^2 z &= \frac{1}{4}\left\{\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)^2-\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)^2\right\} = 1\\ \sin z_1\cos z_2\pm\cos z_1\sin z_2 &= \frac{1}{4i}\left\{\left(e^{iz_1}-e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2}+e^{-iz_2}\right)\pm\left(e^{iz_1}+e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2}-e^{-iz_2}\right)\right\}\\ &= \frac{1}{2i}\left(e^{i(z_1\pm z_2)}-e^{-i(z_1+\pm z_2)}\right) = \sin(z_1\pm z_2)\\ \cos z_1\cos z_2\mp\sin z_1\sin z_2 &= \frac{1}{4}\left\{\left(e^{iz_1}+e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2}+e^{-iz_2}\right)\pm\left(e^{iz_1}-e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2}-e^{-iz_2}\right)\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left(e^{i(z_1\pm z_2)}+e^{-i(z_1+\pm z_2)}\right) = \cos(z_1\pm z_2)\end{aligned}$$

問 2.22

(1)
$$\begin{aligned}\sin z &= 0\\ e^{2iz}-1 &= 0\\ z &= n\pi \quad (n\in\mathbb{Z})\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\cos z &= 1\\ e^{2iz}-2e^{iz}+1 &= 0\\ e^{iz} &= 1\\ z &= 2n\pi \quad (n\in\mathbb{Z})\end{aligned}$$

問 2.23

$$\begin{aligned}\cosh iz &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos z\\ \sinh iz &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2} = i\sin z\\ \cos iz &= \frac{e^{-z}+e^{z}}{2} = \cosh z\\ \sin iz &= \frac{e^{-z}-e^{z}}{2i} = i\sinh z\\ \cosh^2 z-\sinh^2 z &= \frac{1}{4}\left\{\left(e^{z}+e^{-z}\right)^2-\left(e^{z}-e^{-z}\right)^2\right\} = 1\\ \frac{d}{dz}\cosh z &= \frac{d}{dz}\frac{e^{z}+e^{-z}}{2} = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2} = \sinh z\\ \frac{d}{dz}\sinh z &= \frac{d}{dz}\frac{e^{z}-e^{-z}}{2} = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} = \cosh z\end{aligned}$$

問 2.24 式 (2.18), (2.21) を用いる。

$$\begin{aligned}\sin(x+iy) &= \sin x\cos iy + \cos x\sin iy = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y\\ \cos(x+iy) &= \cos x\cos iy - \sin x\sin iy = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y\end{aligned}$$

問 2.25

$$\begin{aligned}|\cos z|^2 &= |\cos(x+iy)|^2 = |\cos x\cosh y - i\sin x\sinh y|^2 = \cos x^2\cosh^2 y + \sin^2 x\sinh^2 y\\ &= \cos^2 x(1+\sinh^2 y) + \sin^2 x\sinh^2 y = \cos^2 x + \sinh^2 y \le 1\\ \sinh^2 y &\le \sin^2 x\\ |\sinh y| &= \left|\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right| \le |\sin x|\end{aligned}$$

左辺は y の偶関数なので $y \geq 0$ として良い。その時、

$$\begin{aligned}e^{2y} - 2|\sin x|e^y - 1 &\le 0\\ e^y &\le |\sin x| + \sqrt{\sin^2 x + 1}\\ y &\le \log(|\sin x| + \sqrt{\sin^2 x + 1})\end{aligned}$$

よって

$$|y| \le \log(|\sin x| + \sqrt{\sin^2 x + 1})$$

右辺は $x = n\pi \quad (n\in\mathbb{Z})$ で 0、$x = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \quad (n\in\mathbb{Z})$ で最大、最小の値、$\pm\log(1+\sqrt{2})$ を取る。

問 2.26

(1) $$\log(-1) = \mathrm{Log}1 + (2n+1)\pi i = (2n+1)\pi i \quad (n\in\mathbb{Z})$$

(2) $$\mathrm{Log}(-1) = \pi i$$

(3) $$\log(3-4i) = \log 5e^{-i\tan^{-1}(4/3)} = \mathrm{Log}5 + i\left(-\tan^{-1}\frac{4}{3} + 2n\pi\right) \quad (n\in\mathbb{Z})$$

(4) $$\mathrm{Log}(3-4i) = \mathrm{Log}5 - i\tan^{-1}\frac{4}{3}$$

問 2.27

(1) $z = re^{i\theta}$ と置くと

$$e^{\log z} = e^{\log r}e^{i\theta + i2n\pi} = re^{i\theta} = z$$

(2) $z = x+iy$ と置くと

$$\log e^z = \log e^x e^{iy} = \mathrm{Log}e^x + iy + 2n\pi i = x + iy + 2n\pi i = z + 2n\pi i \quad (n\in\mathbb{Z})$$

問 2.28

$$\begin{aligned}\log z &= \mathrm{Log}\sqrt{x^2+y^2} + i\left(\tan^{-1}\frac{y}{x} + 2n\pi\right)\\ u &= \mathrm{Log}\sqrt{x^2+y^2}\\ v &= \tan^{-1}\frac{y}{x} + 2n\pi\\ u_x &= \frac{x}{x^2+y^2},\quad u_y = \frac{y}{x^2+y^2}\\ v_x &= \frac{-y/x^2}{1+(y/x)^2} = -\frac{y}{x^2+y^2},\quad v_y = \frac{1/x}{1+(y/x)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}\\ \frac{d}{dz}\log z &= u_x + iv_x = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{z}\end{aligned}$$

問 2.29

(1)
$$i^{1/2} = e^{(1/2)\log i} = e^{(1/2)i(1/2+2n)\pi} = e^{i(1/4+n)\pi} \quad (n=0,1)$$

(2)
$$(-1)^i = e^{i\log(-1)} = e^{ii(2n+1)\pi} = e^{-(2n+1)\pi} \quad (n\in\mathbb{Z})$$

(3)
$$i^i = e^{i\log i} = e^{ii(1/2+2n)\pi} = e^{-(2n+1/2)\pi} \quad (n\in\mathbb{Z})$$

(4)
$$\begin{aligned}(1-i)^{1+i} &= e^{(1+i)\log(1-i)} = e^{(1+i)(\mathrm{Log}\sqrt{2}+i(-1/4+2n)\pi)} = e^{\mathrm{Log}\sqrt{2}}e^{(1/4-2n)\pi}e^{i\mathrm{Log}\sqrt{2}-i\pi/4}\\ &= \sqrt{2}e^{(1/4+2n)\pi}\left\{\cos\left(\mathrm{Log}\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\mathrm{Log}\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right\} \quad (n\in\mathbb{Z})\end{aligned}$$

演習問題

1,2 は省略

3.

(1)
$$\begin{aligned}f(z) &= -x^2-2xy+y^2+i(x^2-2xy-y^2) = -(x^2+2ixy-y^2)+i(x^2+2ixy-y^2)\\ &= (-1+i)z^2\\ f'(z) &= 2(-1+i)z\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}f(z) &= e^{-x}(\cos y - i\sin y) = e^{-x-iy} = e^{-z}\\ f'(z) &= -e^{-z}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}f(z) &= \cosh x\cos y + i\sinh x\sin y = \cos ix\cos y+\sin ix\sin y = \cos(ix-y) = \cos(iz)\\ f'(z) &= -i\sin(iz)\end{aligned}$$

4. (1)-(5) 省略

(6)
$$\begin{aligned}f(z) &= \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y = \sin x\cos iy+\cos x\sin iy = \sin(x+iy) = \sin z\\ f'(z) &= \cos z \quad (z\in\mathbb{C})\end{aligned}$$

5.

(1)
$$\begin{aligned}v_x &= -u_y = -2x+1,\quad v_y = u_x = 2y\\ v &= -x^2+x+g(y),\quad v_y = g'(y) = 2y\\ g(y) &= y^2+c \quad (c\in\mathbb{R}),\quad v = -x^2+x+y^2+c\\ f(z) &= 2xy-y+i(-x^2+x+y^2+c) = -i(x^2+2ixy-y^2)+i(x+iy)+ic\\ &= -iz^2+iz+ic\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}v_x &= -u_y = -\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\\ v_y &= u_x = 2-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\\ v &= 2y+\frac{x}{x^2+y^2}+g(x),\quad v_x = \frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}+g'(x)\\ g(x) &= c \quad (c\in\mathbb{R})\\ v &= 2y+\frac{x}{x^2+y^2}+c\\ f(z) &= 2x+\frac{y}{x^2+y^2}+i\left(2y+\frac{x}{x^2+y^2}+c\right) = 2z+\frac{i}{z}+ic\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}v_x &= -u_y = -e^y\cos x,\quad v_y = u_x = -e^y\sin x\\ v &= -e^y\sin x+g(y),\quad v_y = -e^y\sin x+g'(y) = -e^y\sin x\\ g(y) &= c \quad (c\in\mathbb{R}),\quad v = -e^y\sin x+c\\ f(z) &= e^y\cos x-ie^y\sin x+ic = e^{-ix+y}+ic = e^{-iz}+ic\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} v_x &= -u_y = e^x(x\sin y + \sin y + y\cos y), \quad v_y = u_x = e^x(x\cos y + \cos y - y\sin y) \\ v &= e^x(x\sin y + y\cos y) + g(y), \quad v_y = e^x(x\cos y + \cos y - y\sin y) + g'(y) \\ g(y) &= c \quad (c \in \mathbb{R}), \quad v = e^x(x\sin y + y\cos y) + c \\ f(z) &= e^x(x\cos y - y\sin y) + ie^x(x\sin y + y\cos y) + ic = ze^z + ic \end{aligned}$$

6.

(1)

$$\begin{aligned} e^z &= \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2e^{\pi i/6} \\ z &= \mathrm{Log}2 + i\left(\frac{1}{6} + 2n\right)\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{1}{2}, \quad e^{2iz} - ie^{iz} - 1 = 0 \\ e^{iz} &= \frac{i + \sqrt{-1+4}}{2} = \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{3} + i\right) = e^{\pi i/6}, \quad e^{5\pi i/6} \\ z &= \frac{1}{6}\pi + 2n\pi, \quad \frac{5}{6}\pi + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \cos z &= 2, \quad e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0 \\ e^{iz} &= 2 \pm \sqrt{3}, \quad iz = \mathrm{Log}(2 \pm \sqrt{3}) + 2n\pi i \quad (n \in \mathbb{Z}) \\ z &= -i\mathrm{Log}(2 \pm \sqrt{3}) + 2n\pi \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} \sin z &= -i, \quad e^{2iz} - 2e^{iz} - 1 = 0 \\ e^{iz} &= 1 \pm \sqrt{2} \\ iz &= \mathrm{Log}(\sqrt{2}+1) - 2n\pi i, \quad \mathrm{Log}(\sqrt{2}-1) - (2n+1)\pi i \quad (n \in \mathbb{Z}) \\ z &= -i\mathrm{Log}(\sqrt{2}+1) + 2n\pi, \quad -i\mathrm{Log}(\sqrt{2}-1) + (2n+1)\pi \end{aligned}$$

7. 教科書の巻末の解答の通り

8.

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x} \\ \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} = \cos\theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\theta \\ d\theta &= \cos^2\theta\left(-\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy\right) = -\frac{\sin\theta}{r}dx + \frac{\cos\theta}{r}dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \theta} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \\ u_y &= \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial \theta} = \sin\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \\ v_x &= \cos\theta\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \\ v_y &= \sin\theta\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \end{aligned}$$

Cauchy-Riemann の関係式より

$$\begin{aligned} \cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} &= \sin\theta\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \sin\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} &= -\cos\theta\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \end{aligned}$$

第１式 $\times \cos\theta+$ 第２式 $\times \sin\theta$, 第１式 $\times(-\sin\theta)+$ 第２式 $\times \cos\theta$ を作ると

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}$$

9.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u^2 \;=\; 2\frac{\partial}{\partial x}u_x u \;=\; 2u_{xx}u + 2(u_x)^2$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2 &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(u^2+v^2\right) \\
&= 2(u_{xx}+u_{yy})u + 2(v_{xx}+v_{yy})v + 2(u_x^2+u_y^2+v_x^2+v_y^2) \\
&= 2(u_x^2+u_y^2+v_x^2+v_y^2) \;=\; 4(u_x^2+v_x^2) \;=\; 4\left|f'(z)\right|^2
\end{aligned}$$

３行目の等号で用いたことは以下の通りである。最初の等号では u, v が調和関数であることを用いた。２番目の等号では Cauchy-Riemann の関係式を用いた。最後の等号では $|f'(z)|^2 = |u_x + iv_x|^2 = (u_x^2 + v_x^2)$ を用いた。

10. 9 より

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla^2 \sum_k |f_k(z)|^2 = 4\sum_k |f_k'(z)|^2 \\
\therefore\;\; |f_k'(z)| &= 0 \;\Rightarrow\; f_k'(z) \;=\; 0
\end{aligned}$$

例題 2.7 により $f_k(z)$ は定数

第３章

問 3.1 $F = U + iV$ と書くと実数値関数の場合に帰着する。$F' = U' + iV'$ なので U', V' も連続。その時

$$\int_\alpha^\beta U'(t)dt \;=\; U(\beta) - U(\alpha)$$

V についても同様。従って

$$\int_\alpha^\beta F'(t)dt \;=\; \int_\alpha^\beta U'(t)dt + i\int_\alpha^\beta V'(t)dt \;=\; U(\beta)-U(\alpha)+i(V(\beta)-V(\alpha)) \;=\; F(\beta)-F(\alpha)$$

問 3.2 図示は省略

(1) $x = t^2$, $y = t$ $(0 \le t \le 1)$ より $y = \sqrt{x}$ $(0 \le x \le 1)$

(2) $x = 2\cos t$, $y = \sin$ $(0 \le t \le \pi)$ より

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 \;=\; 1 \;\;(0 \le y \le 1)$$

問 3.3

$$\int_{C_2} f(z)dt \;=\; \int_0^1 \left(t^n(1+i)\right)^2 nt^{n-1}(1+i)dt \;=\; n(1+i)^3\int_0^1 t^{3n-1}dt \;=\; \frac{n(1+i)^3}{3n} \;=\; \frac{(1+i)^3}{3}$$

$$\begin{aligned}
\int_{C_3} f(z)dt &= \int_0^1 \left(\varphi(t)(1+i)\right)^2 \varphi'(t)(1+i)dt \;=\; (1+i)^3\int_0^1 \left(\varphi(t)\right)^2\varphi'(t)dt \;=\; \frac{(1+i)^3}{3}\left[\left(\varphi(t)\right)^3\right]_0^1 \\
&= \frac{(1+i)^3}{3}
\end{aligned}$$

問 3.4

$$\int_C f(z)dz \;=\; \int_0^1 (t - it^2)(1+2it)dt \;=\; \int_0^1 t(1+it+2t^2)dt \;=\; 1 + \frac{1}{3}i$$

問 3.5

(1)

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} f(z)dz &= \int_0^1 2t^2(1+i)dt \;=\; \frac{2}{3}(1+i) \\
\int_{C_2} f(z)dz &= \int_0^1 t^2dt + \int_0^1 (1+t^2)idt \;=\; \frac{1}{3}+\frac{4}{3}i \\
\int_{C_3} f(z)dz &= \int_0^1 t^2idt + \int_0^1 (t^2+1)dt \;=\; \frac{4}{3}+\frac{1}{3}i
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_{C_1} f(z)dz &= \int_0^1 (1+i)^2 t^2 (1+i)dt \;=\; \frac{2}{3}(-1+i)\\ \int_{C_2} f(z)dz &= \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 (1+it)^2 idt \;=\; \frac{2}{3}(-1+i)\\ \int_{C_3} f(z)dz &= \int_0^1 (it)^2 idt + \int_0^1 (t+i)^2 dt \;=\; \frac{2}{3}(-1+i)\end{aligned}$$

問 3.6

$$\begin{aligned}&(n\neq -1)\\ \int_C (z-a)^n dz &= \int_0^\pi \left(re^{it}\right)^n ire^{it}dt \;=\; ir^{n+1}\left[\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)}\right]_0^\pi \;=\; r^{n+1}\frac{e^{i\pi(n+1)}-1}{n+1}\\ &= \begin{cases} 0 & (n:\ \text{odd})\\ -\frac{2r^{n+1}}{n+1} & (n:\ \text{even})\end{cases}\\ \int_C (z-a)^{-1}dz &= \pi i\end{aligned}$$

問 3.7

$$f(z)dz \;=\; (u+iv)(dx+idy) \;=\; udx - vdy + i(vdx+udy)$$

あるいは

$$\begin{aligned}\int f(z)dz &= \int f(z(t))z'(t)dt \;=\; \int (u+iv)(x'(t)+iy'(t))dt \int (ux'-vy')dt + i\int (vx'+uy')dt\\ &= \int (udx - vdy) + i\int (vdx+udy)\end{aligned}$$

問 3.8

(1)
$$\int_{|z|=2}\frac{dz}{z(z-1)} \;=\; \int\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}\right)dz \;=\; 0$$

(2)
$$\int_{|z-1|=1/2}\frac{dz}{z^2-3z+2} \;=\; \int_{|z-1|=1/2}\frac{dz}{(z-2)(z-1)} \;=\; \int\left(\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}\right)dz \;=\; -2\pi i$$

(3)
$$\int_{|z|=2}\frac{z}{z^2-1}dz \;=\; \frac{1}{2}\int_{|z|=2}\left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}\right)dz \;=\; 2\pi i$$

(4)
$$\int_{|z-i|=1}\frac{dz}{z^4-1} \;=\; \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}-\frac{1}{i}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right)\right)dz \;=\; -\frac{\pi}{2}$$

問 3.9 何を (3.14') の $f(z)$ と見るのかに注意。

(1)
$$\int_C \frac{z^3}{z+i}dz \;=\; 2\pi i(-i)^3 \;=\; -2\pi$$

(2)
$$\int_C \frac{z}{(z+1)(z-3)}dz \;=\; 2\pi i\frac{-1}{-4} \;=\; \frac{\pi}{2}i$$

(3)
$$\int_C \frac{e^z}{z^2-2z}dz \;=\; \frac{1}{2}\left(\int \frac{e^z}{z-2}dz - \int\frac{e^z}{z}dz\right) \;=\; \pi i\left(e^2-1\right)$$

(4)
$$\int_C \frac{\sin z}{z^2+1}dz \;=\; \;=\; 2\pi i\frac{\sin i}{2i} \;=\; \pi i\sinh 1$$

問 3.10 何を (3.16') の $f(z)$ と見るのかに注意。

(1)
$$\int_C \frac{\sin\pi z}{(z-1)^4} \;=\; \frac{2\pi i}{3!}\,\frac{d^3}{dz^3}\sin\pi z\bigg|_{z=1} \;=\; \frac{\pi^4}{3}i$$

(2)
$$\int_C \frac{z^4+1}{z^2(z-2i)}dz \;=\; 2\pi i\,\frac{d}{dz}\frac{z^4+1}{z-2i}\bigg|_{z=0} \;=\; 2\pi i\left(\frac{4z^3}{z-2i}-\frac{z^4+1}{(z-2i)^2}\right)_{z=0} \;=\; \frac{\pi}{2}i$$

(3)
$$\int_C \frac{\cosh z}{z^3}dz \;=\; \frac{2\pi i}{2!}\cosh 0 \;=\; \pi i$$

(4)
$$\begin{aligned}\int_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2} &= \frac{1}{4}\int e^z\left(\frac{1}{i}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right)-\frac{1}{(z-i)^2}-\frac{1}{(z+i)^2}\right) \\ &= \frac{2\pi i}{4}\left(\frac{1}{i}\left(e^i-e^{-i}\right)-e^i-e^{-i}\right) = \pi i(\sin 1-\cos 1)\end{aligned}$$

演習問題

1, 2, 3 は省略

4 $C:\ |z|=1$

(1)
$$\int_C \frac{z}{z-2}dz = 0$$

(2)
$$\int_C \frac{dz}{z^2-2z} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z}\right)dz = -\pi i$$

(3)
$$\int_C \frac{dz}{z^2(z^2+4)} = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^2+4}\right)dz = 0$$

(4)
$$\int_C \frac{z^2+4}{z^3}dz = \int\left(\frac{1}{z}+\frac{4}{z^3}\right)dz = 2\pi i$$

(5)
$$\int_C \frac{e^{\pi z}}{2z-i}dz = \frac{2\pi i}{2}e^{\pi i/2} = -\pi$$

(6)
$$\begin{aligned}\int_C \frac{dz}{(az-1)(z-a)} &= \frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}-a\right)^{-1}\int\left(\frac{1}{z-1/a}-\frac{1}{z-a}\right)dz \\ &= \frac{1}{1-a^2}\times\begin{cases}2\pi i & (|a|>1)\\ -2\pi i & (|a|<1)\end{cases}\end{aligned}$$

5. $C:\ |z|=2,\ n\in\mathbb{N}$

(1)
$$\int_C \frac{3z^2+z}{z^2-1}dz = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)(3z^2+z)dz = \pi i(4-2) = 2\pi i$$

(2)
$$\int_C \frac{dz}{e^z(z+1)^3} = \frac{2\pi i}{2!}e^1 = \pi e i$$

(3)
$$\int_C \frac{z\cos z}{(z-i)^2} = 2\pi i\left.(z\cos z)'\right|_{z=i} = 2\pi i(\cos i - i\sin i) = 2\pi e i$$

(4)
$$\begin{aligned}\int_C \frac{z^2}{1-z^4}dz &= \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+z}+\frac{1}{i}\left(\frac{1}{i-z}+\frac{1}{i+z}\right)\right) \\ &= \frac{\pi i}{2}\left(-1+1+\frac{1}{i}(-1+1)\,i^2\right) = 0\end{aligned}$$

(5)
$$\int_C \frac{\sin z}{z^n}dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!}\left.(\sin z)^{(n-1)}\right|_{z=0} = \begin{cases}0 & (n:\ \text{odd})\\ \frac{2\pi i}{(n-1)!}(-1)^{n/2-1} & (n:\ \text{even})\end{cases}$$

(6)
$$\begin{aligned}I &= \int_C \frac{z^n}{z^2+a^2}dz = \frac{1}{2ai}\int\left(\frac{1}{z-ai}+\frac{1}{z+ai}\right)z^n \\ &= \begin{cases}0 & (a>2)\\ \frac{\pi}{a}\left((ai)^n-(-ai)^n\right) = \pi a^{n-1}i^n\left[1-(-1)^n\right] & (a<2)\end{cases}\end{aligned}$$

$a<2,\ n$ が偶数であれば $I=0$。$a<2,\ n$ が奇数であれば

$$I = 2\pi i a^{n-1}(-1)^{(n-1)/2}$$

6.

$$\begin{aligned}I &= \int_{|z|=1}\frac{e^{az}}{z}dz = 2\pi i \\ I &= \int_0^{2\pi}\frac{e^{a(\cos\theta+i\sin\theta)}}{e^{i\theta}}ie^{i\theta}d\theta = i\int_0^{2\pi}e^{a\cos\theta}\left(\cos(a\sin\theta)+i\sin(a\sin\theta)\right)d\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \int_0^{2\pi}e^{a\cos\theta}\cos(a\sin\theta) &= 2\pi \\ \int_0^{2\pi}e^{a\cos\theta}\sin(a\sin\theta)d\theta &= 0\end{aligned}$$

7. 教科書の解答の通りである。但し、「例題 2.8」は「例題 2.7」の誤り。

第４章

問 4.1

(1)
$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n!} + \frac{(-z)^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

(2)
$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n!} - \frac{(-z)^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

問 4.2 収束半径は定理 4.8 で与えられている。

(1)
$$f(z) = e^z, \quad f^{(n)}(1) = e, \quad e^z = e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n!} \quad (|z-1| < \infty)$$

(2)
$$f(z) = \frac{1}{z}, \quad f^{(n)}(z) = (-1)^n\frac{n!}{z^{n+1}}, \quad \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n \quad (|z-1| < 1)$$

$$\text{Or} \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{1+z-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$$

(3)
$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-i+i-2} = \frac{1}{i-2}\frac{1}{1-(z-i)/(2-i)} = -\frac{1}{2-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{2-i}\right)^n \quad (|z| < \sqrt{5})$$

問 4.3 d'Hospital の定理を用いても良いが、Taylor 展開で充分。

(1)
$$\lim_{z\to 0}\frac{e^{2iz}-1}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{2iz}{z} = 2i$$

(2)
$$\lim_{z\to 0}\frac{\cos\pi iz - 1}{z^2} = -\frac{1}{2}(\pi i)^2 = \frac{\pi^2}{2}$$

(3)
$$\lim_{z\to 0}\frac{\cos z - e^{iz}}{\sin\pi iz} = \lim_{z\to 0}\frac{-iz}{\pi iz} = -\frac{1}{\pi}$$

問 4.4

(1)
$$\frac{1}{z^3e^{2z}} = \frac{1}{z^3}e^{-2z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!}z^{n-3} \quad (0 < |z| < \infty)$$

(2)
$$\frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n-3} \quad (0 < |z| < \infty)$$

(3)
$$z\cos\frac{1}{z^2} = z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{-4n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{1-4n} \quad (0 < |z| < \infty)$$

教科書の解答には間違いあり。

問 4.5

(1)
$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = \sum_{n=0}^{\infty}z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$$

(2)
$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z} - \frac{1}{2-z} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

(3)
$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z} + \frac{1}{z}\frac{1}{1-2/z} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{n-1}-1\right)\frac{1}{z^n}$$

問 4.6

(1) $$\frac{e^{2z}-1}{z} = \frac{1}{z}\sum_{n=1}\frac{(2z)^n}{n!} = \sum_{n=0}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}z^n, \quad \tilde{f}(0) = 2$$

(2) $$\frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}z^{2n}, \quad \tilde{f}(0) = 1$$

問 4.7

(1) $$\frac{z}{z^2+4iz-3} = \frac{z}{(z+i)(z+3i)}$$ $-i, -3i$ は1位の極。

(2) $$\frac{z-2i}{(z^2+4)^2} = \frac{1}{(z+2i)^2(z-2i)}$$ $2i$ は1位の極、$-2i$ は2位の極。

(3) $$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$ $(n+1/2)\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$ は1位の極。

演習問題

1.

(1) $$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-1-1} = -\frac{1}{1-(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n \quad (|z-1|<1)$$

(2) $$\frac{1}{z(z-2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1-(z-1)}-\frac{1}{1+(z-1)}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}\{-(z-1)^n-(-1)^n(z-1)^n\} = -\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^{2n} \quad (|z-1|<1)$$

Or

$$\frac{1}{z(z-2)} = \frac{1}{(z-1)^2-1} = -\frac{1}{1-(z-1)^2} = -\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^{2n} \quad (|z-1|<1)$$

(3) $$(\sin z)^{(4n)} = \sin z, \quad (\sin z)^{(4n\pm1)} = \pm\cos z, \quad (\sin z)^{(4n+2)} = -\sin z$$
$$\sin z = \sum_{n=0}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^{2n} \quad \left(\left|z-\frac{\pi}{2}\right|<\infty\right)$$

(4) $$\sin^2 z = \frac{1}{2}(1-\cos 2z) = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2z)^{2n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}2^{2n-1}z^{2n} \quad (|z|<\infty)$$

2.

(1) $$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z-1}-\frac{1}{1-(z-1)}$$
$$= \frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^{n-1}$$

(2) $$\frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+z}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+z}+\frac{1}{2}\frac{1}{2-(z+1)}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{1+z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+2}}(z+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(z+1)^{n-1}$$

(3) $$\frac{z}{1+z^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z+i}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{z-i}+\frac{1}{2}\frac{1}{2i+(z-i)} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-i}+\frac{1}{4i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-i)^n}{(2i)^n}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{z-i}+\frac{1}{4i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{2^n}(z-i)^n = \frac{1}{2}\frac{1}{z-i}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{n-1}}{2^{n+2}}(z-i)^n$$

(4) $$\frac{1}{z^2(z^2+1)} = \frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{z^2}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n-2}$$

(5)
$$\frac{\sin z}{z-\pi} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)!}(z-\pi)^{2n}$$

1(3) の解答を参照の事。

(6)
$$z^2e^{-1/z} = z^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^{2-n}$$

3. 省略。教科書の解答の理由を吟味すること。

4. 省略。教科書の解答の理由を吟味すること。但し (2) の解答では m と n が入れ替わっている。

5. 教科書の解答の通り。但し、定理 4.18 が暗黙に念頭にあることに注意すること。

6., **7.** 教科書の解答の通り。

第５章

問 5.1 教科書の解答にはm問題には無い $\int_C f(z)dz$ の値が与えられているが C は恐らく原点を囲む閉曲線

(1)
$$f(z) = z^ne^{1/z} = z^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{-k}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{n-k}}{k!}$$
$$\mathrm{Res}[f,0] = \frac{1}{(n+1)!}$$

(2)
$$f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^5} = z^{-5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n-5}}{n!}$$
$$\mathrm{Res}[f,0] = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$$

(3)
$$f(z) = z^2\sin\frac{1}{z} = z^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{-(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{1-2n}$$
$$\mathrm{Res}[f,0] = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$$

問 5.2

(1)
$$f(z) = \frac{z}{(z-i)(z+2i)}$$
$$\mathrm{Res}[f,i] = \frac{i}{3i} = \frac{1}{3},\quad \mathrm{Res}[f,-2i] = \frac{-2i}{-3i} = \frac{2}{3}$$

(2)
$$f(z) = \frac{z^2+1}{z(z-1)^3}$$
$$\mathrm{Res}[f,0] = \frac{1}{-1} = -1$$
$$\mathrm{Res}[f,1] = \frac{1}{2}\lim_{z\to1}\frac{d^2}{dz^2}\frac{z^2+1}{z} = \frac{1}{2}\lim_{z\to1}\frac{2}{z^3} = 1$$

(3)
$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z-i)(z-2i)^2}$$
$$\mathrm{Res}[f,i] = \frac{e^{-1}}{(-i)^2} = -\frac{1}{e}$$
$$\mathrm{Res}[f,2i] = \lim_{z\to2i}\frac{d}{dz}\frac{e^{iz}}{z-i} = \lim_{z\to2i}\left(\frac{ie^{iz}}{z-i} - \frac{e^{iz}}{(z-i)^2}\right) = \frac{ie^{-2}}{i} - \frac{e^{-2}}{i^2} = \frac{2}{e^2}$$

(4)
$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+4)^2} = \frac{z^2}{(z+2i)^2(z-2i)^2}$$
$$\mathrm{Res}[f,2i] = \lim_{z\to2i}\frac{d}{dz}\frac{z^2}{(z+2i)^2} = \lim_{z\to2i}\left(\frac{2z}{(z+2i)^2} - \frac{2z^2}{(z+2i)^3}\right) = \frac{4i}{(4i)^2} - \frac{2(2i)^2}{(4i)^3} = -\frac{i}{8}$$
$$\mathrm{Res}[f,-2i] = \lim_{z\to-2i}\frac{d}{dz}\frac{z^2}{(z-2i)^2} = \lim_{z\to-2i}\left(\frac{2z}{(z-2i)^2} - \frac{2z^2}{(z-2i)^3}\right)$$
$$= \frac{-4i}{(-4i)^2} - \frac{2(-2i)^2}{(-4i)^3} = \frac{i}{8}$$

問 5.3

(1)
$$\begin{aligned}
f(z) &= \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \\
\text{For } z \approx \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\ (n\in\mathbb{Z}), \cos z &\approx -\sin\left(z-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right) \\
&\approx -\left(z-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right) \\
\mathrm{Res}\left[f,\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right] &= -1
\end{aligned}$$

Or

$$\mathrm{Res}\left[\frac{\sin z}{\cos z},\left(n+\frac{1}{2}\pi\right)\right] = \left.\frac{\sin z}{-\sin z}\right|_{z=(n+1/2)\pi} = -1$$

(2)
$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{z}{\sin z} \\
\mathrm{Res}[f,0] &= 0\ \ (0\text{ は除去可能な特異点である。}) \\
\text{For } z\approx n\pi\ (n\in\mathbb{Z}, n\neq 0),\ \ \sin z &\approx (z-n\pi)\cos n\pi \\
\mathrm{Res}[f,n\pi] &= \frac{n\pi}{(-1)^n} = (-1)^n n\pi
\end{aligned}$$

Or

$$\mathrm{Res}[f,n\pi] = \left.\frac{z}{\cos z}\right|_{z=n\pi} = (-1)^n n\pi$$

問 5.4

(1)
$$\begin{aligned}
\int_C \frac{dz}{z^3+1} &= 2\pi i\left(\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^3+1},e^{\pi i/3}\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^3+1},e^{-\pi i/3}\right]\right) \\
\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^3+1},e^{\pi i/3}\right] &= \frac{1}{e^{\pi i/3}+1}\frac{1}{e^{\pi i/3}-e^{-\pi i/3}} = \frac{2}{3+\sqrt{3}i}\frac{1}{\sqrt{3}i} = \frac{3-\sqrt{3}i}{6}\frac{1}{\sqrt{3}i} = -i\frac{\sqrt{3}-i}{6} \\
\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^3+1},e^{-\pi i/3}\right] &= \frac{1}{e^{-\pi i/3}+1}\frac{1}{e^{-\pi i/3}-e^{\pi i/3}} = \overline{\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^3+1},e^{\pi i/3}\right]} = i\frac{\sqrt{3}+i}{6} \\
\int_C \frac{dz}{z^3+1} &= -\frac{2}{3}\pi i
\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}
\int_C \frac{z^2}{z^4+1}dz &= 2\pi i\left(\mathrm{Res}\left[\frac{z^2}{z^4+1},e^{\pi i/4}\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{z^2}{z^4+1},e^{-\pi i/4}\right]\right) \\
\mathrm{Res}\left[\frac{z^2}{z^4+1},e^{\pi i/4}\right] &= i\frac{1}{e^{\pi i/4}-e^{3\pi i/4}}\frac{1}{e^{\pi i/4}-e^{-3\pi i/4}}\frac{1}{e^{\pi i/4}-e^{-\pi i/4}} \\
&= i\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}(1+i)\sqrt{2}i} = \frac{\sqrt{2}(1-i)}{8} \\
\mathrm{Res}\left[\frac{z^2}{z^4+1},e^{-\pi i/4}\right] &= -i\frac{1}{e^{-\pi i/4}-e^{3\pi i/4}}\frac{1}{e^{-\pi i/4}-e^{-3\pi i/4}}\frac{1}{e^{-\pi i/4}-e^{\pi i/4}} \\
&= \overline{\mathrm{Res}\left[\frac{z^2}{z^4+1},e^{\pi i/4}\right]} = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{8} \\
\int_C \frac{z^2}{z^4+1}dz &= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i
\end{aligned}$$

問 5.5

(1)
$$\begin{aligned}
\int_{|z|=3}\frac{z}{(z+2)(z-1)}dz &= 2\pi i\left(\mathrm{Res}\left[\frac{z}{(z+2)(z-1)},1\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{z}{(z+2)(z-1)},-2\right]\right) \\
&= 2\pi i\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right) = 2\pi i
\end{aligned}$$

(2)
$$\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z(z-2)}dz = 2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{e^z}{z(z-2)},0\right] = -\pi i$$

(3)
$$\begin{aligned}
\int_{|z-i|=1}\frac{z\sin z}{(z-i)^2}dz &= 2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{z\sin z}{(z-i)^2}, i\right] \\
\mathrm{Res}\left[\frac{z\sin z}{(z-i)^2}, i\right] &= \left.\frac{d}{dz}z\sin z\right|_{z=i} \;=\; (\sin z + z\cos z)|_{z=i} \;=\; \sin i + i\cos i \;=\; ie \\
\int_{|z-i|=1}\frac{z\sin z}{(z-i)^2}dz &= -2\pi e
\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}
|e^{\pm\pi i/4}-1|^2 &= 2-2\cos\frac{\pi}{4} \;=\; 2-\sqrt{2} \;<\; 1 \\
|e^{\pm 3\pi i/4}-1|^2 &= 2-2\cos\frac{3\pi}{4} \;=\; 2+\sqrt{2} \;>\; 3 \\
\int_{|z-1|=1}\frac{z}{z^4+1}dz &= 2\pi i\left(\mathrm{Res}\left[\frac{z}{z^4+1}, e^{\pi i/4}\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{z}{z^4+1}, e^{-\pi i/4}\right]\right) \\
\mathrm{Res}\left[\frac{z}{z^4+1}, e^{\pi i/4}\right] &= \frac{e^{\pi i/4}}{(e^{\pi i/4}-e^{3\pi i/4})(e^{\pi i/4}-e^{-3\pi i/4})(e^{\pi i/4}-e^{-\pi i/4})} \\
&= \frac{e^{\pi i/4}}{\sqrt{2}\sqrt{2}(1+i)\sqrt{2}i} \;=\; -\frac{1}{4}i \\
\mathrm{Res}\left[\frac{z}{z^4+1}, e^{-\pi i/4}\right] &= \frac{e^{-\pi i/4}}{(e^{-\pi i/4}-e^{3\pi i/4})(e^{-\pi i/4}-e^{-3\pi i/4})(e^{-\pi i/4}-e^{\pi i/4})} \\
&= \overline{\mathrm{Res}\left[\frac{z}{z^4+1}, e^{\pi i/4}\right]} \;=\; \frac{1}{4}i \\
\int_{|z-1|=1}\frac{z}{z^4+1}dz &= 0
\end{aligned}$$

問 5.6 被積分関数は実数で正なので、積分の結果は全て実数で正。i の消え方を観察すること。

(1)
$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{4-3\cos\theta} \;=\; \int_C\frac{1}{4-\frac{3}{2}(z+z^{-1})}\frac{dz}{iz} \;=\; 2i\int_C\frac{dz}{3z^2-8z+3} \\
&3z^2-8z+3=0 \Rightarrow z=\frac{4\pm\sqrt{7}}{3} \\
I &= 2\pi i 2i\mathrm{Res}\left[\frac{1}{3z^2-8z+3}, \frac{4-\sqrt{7}}{3}\right] \;=\; \frac{-4\pi}{-2\sqrt{7}} \;=\; \frac{2\sqrt{7}}{7}\pi
\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3\sin\theta} \;=\; \int_C\frac{1}{5+\frac{3}{2i}(z-z^{-1})}\frac{dz}{iz} \;=\; 2\int_C\frac{dz}{3z^2+10iz-3} \\
&3z^2+10iz-3=0 \Rightarrow z=i\frac{-5\pm 4}{3} \\
I &= 2\pi i 2\mathrm{Res}\left[\frac{1}{3z^2+10iz-3}, -\frac{i}{3}\right] \;=\; \frac{4\pi i}{8i} \;=\; \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

(3) $|a|<1$ の時
$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+a\cos\theta} \;=\; \int_C\frac{1}{1+\frac{a}{2}(z+z^{-1})}\frac{dz}{iz} \;=\; \frac{2}{i}\int_C\frac{dz}{az^2+2z+a} \\
&az^2+2z+a=0 \Rightarrow z=\frac{-1\pm\sqrt{1-a^2}}{a} \\
I &= 2\pi i\frac{2}{i}\mathrm{Res}\left[\frac{1}{az^2+2z+a}, \frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right] \;=\; \frac{4\pi}{2\sqrt{1-a^2}} \;=\; \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}
\end{aligned}$$

(4) $a>1$ の時
$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a-\sin\theta} \;=\; \int_C\frac{1}{a-\frac{1}{2i}(z-z^{-1})}\frac{dz}{iz} \;=\; -2\int_C\frac{dz}{z^2-2iaz-1} \\
&z^2-2iaz-1=0 \Rightarrow z=i(a\pm\sqrt{a^2-1}) \\
I &= 2\pi i(-2)\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2-2iaz-1}, i(a-\sqrt{a^2-1})\right] \;=\; \frac{-4\pi i}{-2i\sqrt{a^2-1}} \;=\; \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}
\end{aligned}$$

$a<-1$ であれば (被積分関数は負で)

$$I = 2\pi i(-2)\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2-2iaz-1}, i(a+\sqrt{a^2-1})\right] \;=\; \frac{-4\pi i}{2i\sqrt{a^2-1}} \;=\; -\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

問 5.7 積分の値はすべて正の実数

(1)
$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x+x^2}, \quad 1+z+z^2=0 \Rightarrow z=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2} \\ I &= 2\pi i \mathrm{Res}\left[\frac{1}{1+z+z^2},\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{2\pi i}{i\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{1+x^4} = \pi i\left(\mathrm{Res}\left[\frac{z^2}{1+z^4},e^{i\pi/4}\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{z^2}{1+z^4},e^{3i\pi/4}\right]\right) \\ \mathrm{Res}\left[\frac{z^2}{1+z^4},e^{i\pi/4}\right] &= \left.\frac{z^2}{4z^3}\right|_{z=e^{i\pi/4}} = \frac{e^{-i\pi/4}}{4}, \\ \mathrm{Res}\left[\frac{z^2}{1+z^4},e^{3i\pi/4}\right] &= \left.\frac{z^2}{4z^3}\right|_{z=e^{3i\pi/4}} = \frac{e^{-3i\pi/4}}{4} \\ I &= \pi i\left(-\frac{\sqrt{2}i}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(1+x^2)^2} = \pi i \mathrm{Res}\left[\frac{z^2}{(1+z^2)^2},i\right] \\ \mathrm{Res}\left[\frac{z^2}{(1+z^2)^2},i\right] &= \left.\frac{d}{dz}\frac{z^2}{(z+i)^2}\right|_{z=i} = \left.\left(\frac{2z}{(z+i)^2}-\frac{2z^2}{(z+i)^3}\right)\right|_{z=i} = -\frac{i}{4} \\ I &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

問 5.8 $a>0, b>0$ の時、 $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos bx}{x^4+a^4}dx=\frac{\pi}{a^3}e^{-ab/\sqrt{2}}\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\right)$

実数になるのは間違いない。全体に a^{-3} が掛かるのも、b は a との積で現れるのも間違いない。

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ibx}}{x^4+a^4}dx = 2\pi i\left(\mathrm{Res}\left[\frac{e^{ibz}}{z^4+a^4},ae^{i\pi/4}\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{e^{ibz}}{z^4+a^4},ae^{3i\pi/4}\right]\right) \\ \mathrm{Res}\left[\frac{e^{ibz}}{z^4+a^4},ae^{i\pi/4}\right] &= \left.\frac{e^{ibz}}{4z^3}\right|_{z=ae^{i\pi/4}} = \frac{e^{iba(1+i)/\sqrt{2}}}{4a^3e^{3i\pi/4}} = \frac{e^{iba(1+i)/\sqrt{2}}e^{-3i\pi/4}}{4a^3} \\ \mathrm{Res}\left[\frac{e^{ibz}}{z^4+a^4},ae^{3i\pi/4}\right] &= \left.\frac{e^{ibz}}{4z^3}\right|_{z=ae^{3i\pi/4}} = \frac{e^{iba(-1+i)/\sqrt{2}}}{4a^3e^{9i\pi/4}} = \frac{e^{iba(-1+i)/\sqrt{2}}e^{-i\pi/4}}{4a^3} \\ I &= 2\pi i\frac{e^{-ab/\sqrt{2}}}{4a^4}\left(-e^{iab/\sqrt{2}+i\pi/4}+e^{-iab/\sqrt{2}-i\pi/4}\right) = \frac{\pi}{a^3}e^{-ab/\sqrt{2}}\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

問 5.9 $a>0, b>0$ の時、 $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3\sin bx}{x^4+a^4}dx=\pi e^{-ab/\sqrt{2}}\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)$

$$\begin{aligned} I &= \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3e^{ibx}}{x^4+a^4}dx = \mathrm{Im}2\pi i\left(\mathrm{Res}\left[\frac{z^3e^{ibx}}{z^4+a^4},ae^{i\pi/4}\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{z^3e^{ibx}}{z^4+a^4},ae^{3i\pi/4}\right]\right) \\ \mathrm{Res}\left[\frac{z^3e^{ibx}}{z^4+a^4},ae^{i\pi/4}\right] &= \left.\frac{e^{ibz}}{4}\right|_{z=ae^{i\pi/4}} = \frac{e^{iba(1+i)/\sqrt{2}}}{4} \\ \mathrm{Res}\left[\frac{z^3e^{ibx}}{z^4+a^4},ae^{3i\pi/4}\right] &= \left.\frac{e^{ibz}}{4}\right|_{z=ae^{3i\pi/4}} = \frac{e^{iba(-1+i)/\sqrt{2}}}{4} \\ I &= \mathrm{Im}2\pi i\frac{e^{-ab/\sqrt{2}}}{4}\left(e^{iba/\sqrt{2}}+e^{-iba/\sqrt{2}}\right) = \pi e^{-ab/\sqrt{2}}\cos\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

問 5.10
$$I=\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx=\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 x}{x^2} &= \frac{1-\cos 2x}{2x^2} \\ f(z) &= \frac{e^{2iz}-1}{z^2} \\ C &= (-R,r]-C_r+[r,R)+C_R \quad (R\to\infty,\ r\to 0) \\ \int_C f(z)dz &= 0 \\ \int_{C_R} f(z)dz &= \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}d\theta = \int_0^{\pi}\frac{e^{2iRe^{i\theta}}-1}{Re^{i\theta}}id\theta \\ \left|\int_{C_R} f(z)dz\right| &\le \int_0^{\pi}\frac{|e^{2iRe^{i\theta}}-1|}{R}d\theta \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|e^{2iRe^{i\theta}}-1|^2 &= e^{2iRe^{i\theta}}e^{-2iRe^{-i\theta}}-e^{2iRe^{i\theta}}-e^{-2iRe^{-i\theta}}+1 \\
&= e^{-4R\sin\theta}-2e^{-2R\sin\theta}\cos(2R\cos\theta)+1 \ \le\ (1+e^{-2R\sin\theta})^2
\end{aligned}
$$

$$
\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \ \le\ \int_0^\pi \frac{1+e^{-R\sin\theta}}{R} \ =\ 2\int_0^{\pi/2}\frac{1+e^{-R\sin\theta}}{R} \to 0 \ \ (R\to\infty)
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{C_r} f(z)dz &= \int_0^\pi \frac{e^{2ire^{i\theta}}-1}{re^{i\theta}}id\theta \ =\ \int_0^\pi \frac{2ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}id\theta+O(r) \ \to\ -2\pi \ \ (r\to 0) \\
\int_{-R}^{-r} f(x)dx+\int_r^R f(x)dx &= \int_r^R \frac{2(\cos 2x-1)}{x^2}dx \ =\ -4\int_r^R\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx \ \to -4\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx \\
\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx &= -\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2ix}-1}{x^2}dx \ =\ -\frac{1}{4}\int_{C_r} f(z)dz \ =\ \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

問 5.11, 問 5.12 は講義の範囲外だが折角だから自習してみよう。教科書を読み切る事はすごく大切な事である。

問 5.11

$w=6z+1/z^6$ の零点は

$$
\sqrt[7]{\frac{1}{6}}e^{\pi(1+2n)i/7} \quad (n=0,1,\cdots,6)
$$

で $|z|=1$ の内側。また $z=0$ が 6 位の極。従って、偏角の原理により $T(C,P)=7-6=1$。

以下は確認である。$z=re^{i\theta}$、$w=u+iv$ とすると

$$
\begin{aligned}
u &= 6r\cos\theta+\cos 6\theta/r^6 \\
v &= 6r\sin\theta-\sin 6\theta/r^6
\end{aligned}
$$

明らかに周期 2π の関数と周期 $\pi/3$ の関数の振幅の大小関係で w の運動の主要な周期が変化することが分かる。$r>\sqrt[7]{1/6}$ であれば、z が原点の周りを 1 周する時に w も原点の周りを 1 周しかしない。

問 5.12

$f(z)=z^ne^{a-z}$, $g(z)=-1$ と置くと、

$$
f^{(m)}(z) \ =\ \sum_{k=0}^m \binom{m}{k}\frac{d^k}{dz^k}z^n\frac{d^{m-k}}{dz^{m-k}}e^{a-z} \ =\ \sum_{k=0}^m\binom{m}{k}n(n-1)\cdots(n-k+1)(-1)^{m-k}z^{n-k}e^{a-z}
$$

より

$$
\begin{aligned}
f(0) &= f'(0) \ =\ \cdots \ =\ f^{(n-1)}(0) \ =\ 0 \\
f^{(n)}(z) &= n!e^a \ \ne\ 0
\end{aligned}
$$

なので、$z=0$ は $f(z)=z^ne^{a-z}$ の n 位の零点である。他には零点は無い。ところで $|z|=1$ の時、$|f(z)|=e^{a-\mathrm{Re}z} \ \ge\ e^{a-|z|} \ =\ e^a \ >\ 1 \ =\ |g(z)|$ である。従って、Rouché の定理を $f+g$ に適用することができて、$f(z)+g(z)=z^ne^{a-z}-1$ も $|z|<1$ 内に n 個の零点を持つ。よって方程式 $z^ne^{a-z}=1$ は $|z|<1$ 内に n 個の解を持つ。

演習問題

1.

(1) $I=\displaystyle\int_C\frac{z-2}{z(z-1)}dz,\quad C:|z|=\frac{1}{2},\ |z-1|=\frac{1}{2},\ |z|=2$

極は $z=0,1.$

$$
\begin{aligned}
C:|z|=\frac{1}{2}, &\qquad I=2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{z-2}{z(z-1)},0\right]=4\pi i \\
C:|z-1|=\frac{1}{2}, &\qquad I=2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{z-2}{z(z-1)},1\right]=-4\pi i \\
C:|z|=2, &\qquad I=4\pi-4\pi i=0
\end{aligned}
$$

(2) $I=\int_C \frac{z+1}{(z-2)^2}dz,\quad C:|z|=1,\ |z|=3$
$z=2$ は 2 位の極。

$$\begin{aligned} &C:|z|=1, \qquad I=0 \\ &C:|z|=3, \qquad I=2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{z+1}{(z-2)^2},2\right]=2\pi i\ \frac{d}{dz}(z+1)\bigg|_{z=2}=2\pi i \end{aligned}$$

(3) $I=\int_C \frac{3z^2+2z-4}{z^3-4z}dz,\quad C:|z-4|=1,\ |z-4|=3,\ |z-4|=5$
極は $z=0$, $z=\pm 2$ (1 位)

$$\begin{aligned} C:|z-4|=1,\ I &= 0 \\ C:|z-4|=3,\ I &= 2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{3z^2+2z-4}{z^3-4z},2\right]=2\pi i\frac{12+4-4}{2\cdot 4}=3\pi i \\ C:|z-4|=5, I &= 2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{3z^2+2z-4}{z^3-4z},2\right]+2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{3z^2+2z-4}{z^3-4z},0\right] \\ &= 3\pi i+2\pi i\frac{-4}{-4}=5\pi i \end{aligned}$$

(4) $I=\int_C \frac{1}{(z-a)^2(z-b)(z+b)}dz,\quad C:|z|=|a|+|b|+1$
極は $z=a(2$ 位$)$, $z=\pm b(1$ 位$)$。但し $a=\pm b$ の時は $z=a$ は 3 位。
$a\neq\pm b$ とすると

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z-a)^2(z-b)(z+b)},a\right] &= \frac{d}{dz}\frac{1}{(z-b)(z+b)}\bigg|_{z=a} \\ &= \left(-\frac{1}{(z-b)^2(z+b)}-\frac{1}{(z-b)(z+b)^2}\right)\bigg|_{z=a} \\ &= -\frac{1}{(a-b)^2(a+b)}-\frac{1}{(a-b)(a+b)^2} \\ &= -\frac{2a}{(a-b)^2(a+b)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z-a)^2(z-b)(z+b)},b\right] &= \frac{1}{(z-a)^2(z+b)}\bigg|_{z=b} = \frac{1}{(b-a)^2 2b} \\ \mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z-a)^2(z-b)(z+b)},-b\right] &= \frac{1}{(z-a)^2(z-b)}\bigg|_{z=b} = -\frac{1}{(b+a)^2 2b} \end{aligned}$$

$$I = 2\pi i\left(-\frac{2a}{(a-b)^2(a+b)^2}+\frac{((a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)^2(a+b)^2 2b}\right) = 0$$

$a=b$ の時、

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z-a)^3(z+b)},a\right] = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{(z+b)}\bigg|_{z=a} = \frac{1}{(a+b)^3}$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z-a)^3(z+b)},-b\right] = \frac{1}{(z-a)^3}\bigg|_{z=-b} = -\frac{1}{(a+b)^3}$$

$$I = 0$$

$a=-b$ の時、

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z-a)^3(z-b)},a\right] = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{(z-b)}\bigg|_{z=a} = \frac{1}{(a-b)^3}$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z-a)^3(z-b)},b\right] = \frac{1}{(z-a)^3}\bigg|_{z=b} = -\frac{1}{(a-b)^3}$$

$$I = 0$$

2. $C : |z| = 2$

(1) $I = \int_C \frac{e^z}{(z-1)^2} dz$

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}[f,1] &= \left.\frac{d}{dz}e^z\right|_{z=1} = e \\ I &= 2\pi i e \end{aligned}$$

(2) $I = \int_C \frac{\overline{z}}{2z^2+1} dz = \int_C \frac{4}{(2z^2+1)z} dz$

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}[f,0] &= 4 \\ \mathrm{Res}[f,i/\sqrt{2}] &= \frac{4}{2(i/\sqrt{2})(2i/\sqrt{2})} = -2 \\ \mathrm{Res}[f,-i/\sqrt{2}] &= \frac{4}{2(-i/\sqrt{2})(-2i/\sqrt{2})} = -2 \\ I &= 0 \end{aligned}$$

(3) $I = \int_C \frac{\cos z}{z^3} dz$

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}[f,0] &= \left.\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\cos z\right|_{z=0} = -\frac{1}{2} \\ I &= -\pi i \end{aligned}$$

(4) $I = \int_C \frac{1-e^{2z}}{z^4} dz$

$$\begin{aligned} 1-e^{2z} &= -2z - \frac{1}{2}(2z)^2 - \frac{1}{6}(2z)^3 - \cdots \\ \mathrm{Res}[f,0] &= -\frac{4}{3} \\ I &= -\frac{8\pi}{3}i \end{aligned}$$

(5) $I = \int_C \frac{e^{1/z}}{z^2} dz$

$$\begin{aligned} \frac{e^{1/z}}{z^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n-2}}{n!} \\ \mathrm{Res}[f,0] &= 0 \\ I &= 0 \end{aligned}$$

(6) $I = \int_C \frac{1}{1-2\sin^2 z} dz$

$|z| = 2$ の内部の極は $\pm\pi/4$

$$\begin{aligned} \sin z &= \sin(\pi/4) + \cos(\pi/4)(z-\pi/4) + \cdots = 1/\sqrt{2} + (z-\pi/4)/\sqrt{2} + \cdots \\ \sin z &= \sin(-\pi/4) + \cos(-\pi/4)(z+\pi/4) + \cdots = -1/\sqrt{2} + (z+\pi/4)/\sqrt{2} + \cdots \\ \mathrm{Res}[f,\pi/4] &= -\left.\frac{z-\pi/4}{(\sqrt{2}\sin z - 1)(\sqrt{2}\sin z + 1)}\right|_{z=\pi/4} = -\frac{1}{2} \\ \mathrm{Res}[f,-\pi/4] &= -\left.\frac{z+\pi/4}{(\sqrt{2}\sin z - 1)(\sqrt{2}\sin z + 1)}\right|_{z=\pi/4} = \frac{1}{2} \\ \mathrm{Res}[f,\pi/4] &= -\left.\frac{1}{4\sin z\cos z}\right|_{z=\pi/4} = -\frac{1}{2} \\ \mathrm{Res}[f,-\pi/4] &= -\left.\frac{1}{4\sin z\cos z}\right|_{z=-\pi/4} = \frac{1}{2} \\ I &= 0 \end{aligned}$$

3. 以下、C は $|z| = 1$ の閉曲線である。

(1)
$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3\cos\theta} = \int_C \frac{1}{5+\frac{3}{2}(z+z^{-1})}\frac{dz}{iz} = \frac{2}{i}\int_C \frac{dz}{10z+3z^2+3} \\ &= \frac{2}{i}\int_C \frac{dz}{3(z+1/3)(z+3)} \\ & \quad \mathrm{Res}\left[f, -\frac{1}{3}\right] = \left.\frac{1}{3(z+3)}\right|_{z=-1/3} = \frac{1}{8} \\ I &= 2\pi i \frac{2}{i}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-4\sin\theta} = \int_C \frac{1}{5-\frac{4}{2i}(z-z^{-1})}\frac{dz}{iz} = \int_C \frac{dz}{5iz-2z^2+2} \\ &= -\int_C \frac{dz}{2(z-i/2)(z-2i)} \\ & \quad \mathrm{Res}\left[f, \frac{i}{2}\right] = -\left.\frac{1}{2(z-2i)}\right|_{z=i/2} = \frac{1}{3i} \\ I &= 2\pi i \frac{1}{3i} = \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5+3\cos\theta)^2} = \int_C \frac{1}{(5+\frac{3}{2}(z+z^{-1}))^2}\frac{dz}{iz} = \frac{4}{i}\int_C \frac{zdz}{(10z+3z^2+3)^2} \\ &= \frac{4}{9i}\int_C \frac{zdz}{(z+3)^2(z+1/3)^2} \\ & \quad \mathrm{Res}\left[\frac{z}{(z+3)^2(z+1/3)^2}, -\frac{1}{3}\right] = \frac{d}{dz}\left.\frac{z}{(z+3)^2}\right|_{z=-1/3} = \left.\left(\frac{1}{(z+3)^2} - \frac{2z}{(z+3)^3}\right)\right|_{z=-1/3} \\ &= \frac{9\cdot 5}{64\cdot 4} \\ I &= \frac{8\pi}{9}\mathrm{Res}\left[\frac{z}{(z+3)^2(z+1/3)^2}, -\frac{1}{3}\right] = \frac{5\pi}{32} \end{aligned}$$

(4) $(|a|<1)$
$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2a\sin\theta+a^2} = \int_C \frac{1}{1-\frac{a}{i}(z-z^{-1})+a^2}\frac{dz}{iz} = \int_C \frac{dz}{(a^2+1)iz-az^2+a} \\ &= -\int_C \frac{dz}{a(z-ia)(z-i/a)} = -2\pi i \frac{1}{a(ia-i/a)} = \frac{2\pi}{1-a^2} \end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = \int_C \frac{1}{1-\frac{1}{4}(z-z^{-1})^2}\frac{dz}{iz} = -\frac{4}{i}\int_C \frac{zdz}{(z^2-1)^2-4z^2} \\ &= -\frac{4}{i}\int_C \frac{zdz}{(z^2+2z-1)(z^2-2z-1)} \\ & \quad z^2+2z-1=0 \Rightarrow z=-1\pm\sqrt{2}, \quad z^2-2z-1=0 \Rightarrow z=1\pm\sqrt{2} \\ I &= -8\pi\left(\mathrm{Res}\left[\frac{z}{(z^2+2z-1)(z^2-2z-1)}, -1+\sqrt{2}\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{z}{(z^2+2z-1)(z^2-2z-1)}, 1-\sqrt{2}\right]\right) \\ & \quad \mathrm{Res}\left[\frac{z}{(z^2+2z-1)(z^2-2z-1)}, -1+\sqrt{2}\right] = \frac{-1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}(-2+2\sqrt{2})(-2)} = -\frac{1}{8\sqrt{2}} \\ & \quad \mathrm{Res}\left[\frac{z}{(z^2+2z-1)(z^2-2z-1)}, 1-\sqrt{2}\right] = \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}(2(2-2\sqrt{2})(-2\sqrt{2})} = -\frac{1}{8\sqrt{2}} \\ I &= \sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

(6)
$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{25-16\cos^2\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5+4\cos\theta)(5-4\cos\theta)} \\ &= \frac{1}{50}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{1-(4/5)\cos\theta} + \frac{1}{1+(4/5)\cos\theta}\right)d\theta \end{aligned}$$

問 5.6(3) より

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+a\cos\theta}d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$

$$\sqrt{1-(4/5)^2} = \sqrt{\frac{25-16}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$I = \frac{2\pi}{50} \times \frac{5}{3} \times 2 = \frac{2\pi}{15}$$

4.

(1)

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} \\
& \quad 1+z^6 = 0 \Rightarrow z = e^{i\pi/6+i\pi k/3} \quad (k=0,1,\cdots,5) \\
I &= 2\pi i \left(\mathrm{Res}\left[\frac{1}{1+z^6}, e^{i\pi/6}\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{1}{1+z^6}, i\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{1}{1+z^6}, e^{5i\pi/6}\right] \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left[\frac{1}{1+z^6}, e^{i\pi/6}\right] &= \left.\frac{1}{6z^5}\right|_{z=e^{i\pi/6}} = \frac{e^{-5i\pi/6}}{6} = -\frac{\sqrt{3}+i}{12} \\
\mathrm{Res}\left[\frac{1}{1+z^6}, i\right] &= \left.\frac{1}{6z^5}\right|_{z=i} = \frac{1}{6i} \\
\mathrm{Res}\left[\frac{1}{1+z^6}, e^{5i\pi/6}\right] &= \left.\frac{1}{6z^5}\right|_{z=e^{5i\pi/6}} = \frac{e^{-i\pi/6}}{6} = \frac{\sqrt{3}-i}{12}
\end{aligned}$$

$$I = \frac{2\pi}{3}$$

(2)

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+ai)^2(x-ai)^2} \\
\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z^2+a^2)^2}, ai\right] &= -\left.\frac{2}{(z+ai)^3}\right|_{z=ai} = \frac{1}{4a^3 i} \\
I &= 2\pi i \frac{1}{4a^3 i} = \frac{\pi}{2a^3}
\end{aligned}$$

(3)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^6}$$

極の位置は (1) と同じ。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left[\frac{z^2}{1+z^6}, e^{i\pi/6}\right] &= \left.\frac{1}{6z^3}\right|_{z=e^{\pi i/6}} = -\frac{i}{6} \\
\mathrm{Res}\left[\frac{z^2}{1+z^6}, i\right] &= -\frac{1}{6i} = \frac{i}{6} \\
\mathrm{Res}\left[\frac{z^2}{1+z^6}, e^{5i\pi/6}\right] &= \left.\frac{1}{6z^3}\right|_{z=e^{5\pi i/6}} = -\frac{i}{6}
\end{aligned}$$

$$I = \frac{\pi}{3}$$

(4) $a > 0$ として

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^3} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x+ai)^3(x-ai)^3} \\
\mathrm{Res}\left[\frac{z^2}{(z^2+a^2)^3}, ai\right] &= \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left.\frac{z^2}{(z+ai)^3}\right|_{z=ai} = \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left.\left(2\frac{z}{(z+ai)^3} - 3\frac{z^2}{(z+ai)^4}\right)\right|_{z=ai} \\
&= \left.\left(\frac{1}{(z+ai)^3} - 6\frac{z}{(z+ai)^4} + \frac{6z^2}{(z+ai)^5}\right)\right|_{z=ai} = \frac{1}{16a^3 i} \\
I &= \frac{\pi}{8a^3}
\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty \frac{x^4dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)} = \int_0^\infty \frac{x^4dx}{(x+i)^2(x-i)^2(x+2i)(x-2i)} \\
&\mathrm{Res}\left[\frac{z^4}{(z^2+1)^2(z^2+4)}, i\right] = \frac{d}{dz}\frac{z^4}{(z+i)^2(z^2+4)}\bigg|_{z=i} \\
&= \left(\frac{4z^3}{(z+i)^2(z^2+4)} - \frac{2z^4}{(z+i)^3(z^2+4)} - \frac{2z^5}{(z+i)^2(z^2+4)^2}\right)\bigg|_{z=i} = \frac{11}{36}i \\
&\mathrm{Res}\left[\frac{z^4}{(z^2+1)^2(z^2+4)}, 2i\right] = -\frac{16}{36}i \\
I &= \frac{2\pi i}{2}\left(\frac{11}{36}i - \frac{16}{36}i\right) = \frac{5}{36}\pi
\end{aligned}$$

(6) $a>0,\ n\in\mathbb{N}, n\geq 1$ として

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x+ai)^n(x-ai)^n} \\
&\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z^2+a)^n}, ai\right] = \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\frac{1}{(z+ai)^n}\bigg|_{z=ai} \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\frac{(-n)(-n-1)\cdots(-2n+2)}{(z+ai)^{2n-1}}\bigg|_{z=ai} = \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)(2n-3)\cdots n}{(n-1)!(2ai)^{2n-1}} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!i}{[(n-1)!]^2(2a)^{2n-1}(-1)^n} = -i\frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2(2a)^{2n-1}} \\
I &= \frac{2\pi i}{2}(-i)\frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2(2a)^{2n-1}} = \frac{(2n-2)!\pi}{[(n-1)!]^2(2a)^{2n-1}}
\end{aligned}$$

実は章末に付録として与えられている Γ(ガンマ) 関数、B(ベータ) 関数を用いて以下のような公式が知られている。

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^\nu+1)^\beta} = \frac{1}{\nu}B\left(\beta-\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right) = \frac{1}{\nu}\frac{\Gamma(\beta-\frac{1}{\nu})\Gamma(\frac{1}{\nu})}{\Gamma(\beta)}$$

但し、積分が存在するためには $\beta,\nu>0,\ \beta\nu>1$ でなければばならない。

与えられた積分委 $x=ay$ と変数変換すると

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^{2n-1}}\int_0^\infty \frac{dy}{(y^2+1)^n} = \frac{1}{2a^{2n-1}}\frac{\Gamma(n-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n)}$$

Γ 関数の公式

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) &= (x-1)\Gamma(x-1) \\
\Gamma(n) &= (n-1)! \\
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

を用いると以下のように複素積分を用いた結果を再現する。

$$\begin{aligned}
\Gamma(n-\frac{1}{2}) &= \left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 1}{2^{n-1}}\sqrt{\pi} = \frac{(2n-3)!!}{2^{n-1}}\sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(2n-2)!!}\sqrt{\pi} = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}(n-1)!}\sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

$$I = \frac{\pi}{(2a)^{2n-1}}\frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2}$$

5. 以下では $a,b>0, \alpha\in\mathbb{R}$。$a,b$ の符号が何に効いているのか考えること。

(1) $$I = \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin bx dx}{x^2+a^2} = 0$$ 被積分関数が奇関数！

(2)
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x+\alpha)^2+b^2} = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}dx}{(x+\alpha)^2+b^2} = \mathrm{Re} 2\pi i \frac{e^{i(-\alpha+bi)}}{2bi} = \frac{\pi}{b}e^{-b}\cos\alpha$$

(3)
$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin bx dx}{x^4+a^4} = \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ibx}dx}{x^4+a^4} \\ &= \mathrm{Im}\ 2\pi i \left(\mathrm{Res}\left[\frac{ze^{ibx}}{z^4+a^4}, ae^{i\pi/4}\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{ze^{ibx}}{z^4+a^4}, ae^{3i\pi/4}\right]\right) \\ &= \mathrm{Im}\ 2\pi i \left(\frac{e^{iba(1+i)/\sqrt{2}}}{4(ae^{i\pi/4})^2} + \frac{e^{iba(-1+i)/\sqrt{2}}}{4(ae^{3i\pi/4})^2}\right) = \mathrm{Im}\ \frac{2\pi i}{4a^2 i}\left(e^{ab(-1+i)/\sqrt{2}} - e^{ab(-1-i)/\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{\pi}{2a^2}e^{-ab/\sqrt{2}}\mathrm{Im}\ \left(e^{iab/\sqrt{2}} - e^{-iab/\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{a^2}e^{-ab/\sqrt{2}}\sin\frac{ab}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(4)
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$$

$a \neq b$ の時、

$$I = 2\pi i\left(\frac{e^{-a}}{2ai(b^2-a^2)} + \frac{e^{-b}}{2bi(a^2-b^2)}\right) = \frac{\pi}{b^2-a^2}\left(\frac{e^{-a}}{a} - \frac{e^{-b}}{b}\right)$$

$a = b$ の時は 2 位の極を生じるが括弧の中で $b = a + (b-a)$ として $b - a$ を微小量として 1 次まで展開すると $(b-a)$ が分子、分母で打ち消し合い、$b \to a$ とすると正しい答えに行き着く。

$$I = \frac{\pi}{b^2-a^2}\left(\frac{e^{-a}}{a} - \frac{e^{-a-(b-a)}}{a+(b-a)}\right) \approx \frac{\pi}{b^2-a^2}\frac{e^{-a}}{a}(b-a)\frac{a+1}{a} \to \frac{\pi e^{-a}(a+1)}{2a^3}$$

もちろん 2 位の極の留数を計算しても良い。

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}\left[\frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)^2}, ai\right] &= \left.\frac{d}{dz}\frac{e^{iz}}{(z+ai)^2}\right|_{z=ai} = \left.\left(\frac{ie^{iz}}{(z+ai)^2} - \frac{2e^{iz}}{(z+ai)^3}\right)\right|_{z=ai} \\ &= -\frac{i}{4a^3}e^{-a}\,(a+1) \end{aligned}$$

$$I = \frac{\pi e^{-a}\,(a+1)}{2a^3}$$

6. 仮定により、$|z| = r$ で $|-e^z| = e^{\mathrm{Re}z} \leq e^{|z|} = e^r < |a|r^n = |az^n|$。即ち、$|-e^z| < |az^n|$。$az^n$ は原点に n 位の零点を持つので、Rouché の定理により $az^n - e^z$ も $|z| < r$ に n 個の零点を持つ。従って、$e^z = az^n$ も $|z| < r$ に n 個の解を持つ。

7. $f(z) = a_n z^n$, $g(z) = a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_0$ と置く。R を充分大きく取ると、$|z| = R$ で

$$\frac{|f(z)|}{|g(z)|} \leq \frac{a_n}{a_{n-1}R^{-1} + a_{n-2}R^{-2} + \cdots + a_0 R^{-n}} < 1$$

とすることができる。$f(z)$ は原点に n 位の零点を持つので、この $f(z)$, $g(z)$ に Rouché に定理を応用すると $f(z) + g(z)$ も $|z| < R$ に n 個の零点を持つ。

8.

(1) $f(z) = z^n$, $g(z) = p_1 z^{n-1} + p_2 z^{n-2} + \cdots + p_n$ と置くと仮定により $|z| = 1$ の時

$$|g(z)| < |p_1| + \cdots + |p_n| < 1 = |f(z)|$$

$f(z)$ は $z = 0$ に n 位の極を持つので、Rouché の定理により $P(z) = f(z) + g(z)$ も $|z| < 1$ に n 個の零点を持つ。$P(z)$ の零点は n 個なので、$P(z)$ の零点はすべて $|z| < 1$ にある。

(2) 証明は教科書の解答の通り。但し、証明を読めば分かるように、問題文の「少なくとも」は削除すべきである。