

Joukowski 変換は

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (1)$$

で定義される。多くの教科書で扱われるのは $a \in \mathbb{C}$ を中心とし、1 を通る円の像である。但し、 $\text{Re}a = 1/2$ の時、円は 0 を通り、そこでは w が発散する。また $\text{Re}a > 1/2$ の時、円は 0 を囲まなくなる。このノートでもこれらの場合は扱わず、以下では

$$\text{Re}a < 1/2 \quad (2)$$

とする。必要に応じて

$$z = x + iy = re^{i\theta} \quad (3)$$

$$a = \alpha + i\beta = \rho e^{i\varphi} \quad (4)$$

$$w = u + iv \quad (5)$$

で定義される $x, y, r, \theta, \alpha, \beta, \rho, \varphi, u, v$ を用いる。

まず z 平面上の円について調べておく (Figure 1)。円の半径を r_0 とすると円は方程式

$$|z - a|^2 = r_0^2 \quad (6)$$

で定まる。1 を通るので

$$r_0^2 = |1 - a|^2 = 1 + \rho^2 - 2\rho \cos \varphi \quad (7)$$

一方、円の方程式は極形式を用いると

$$|z - a|^2 = r^2 - 2r\rho \cos(\theta - \varphi) + \rho^2 = r_0^2 \quad (8)$$

この式に (7) を用いると

$$r^2 - 2r\rho \cos(\theta - \varphi) + 2\rho \cos \varphi - 1 = 0 \quad (9)$$

r について解くと

$$r_{\pm}(\theta) = \rho \cos(\theta - \varphi) \pm \sqrt{\rho^2 \cos^2(\theta - \varphi) - 2\rho \cos \varphi + 1} \quad (10)$$

を得る。但し、式 (2) の仮定により $2\rho \cos \varphi < 1$ であり、右辺の根号は右辺の第 1 項の大きさを超えるため r_- は負となり、 r_- は z の絶対値とは成り得ない。逆にこの仮定により $r_+(\theta) > 0$ であることが保証される。(一方で、式 (2) と逆の場合は根号の中が負になる角度 θ の範囲があり、 φ を中心としたある範囲の θ でしか式 (10) は意味を持たない。この場合、 $|z|$ は r_{\pm} で表された θ の 2 価関数となる。これは上述の「円が原点を囲まない」ことに対応している。容易に想像できるように r_{\pm} の繋ぎ目は原点を通る直線と円の接点である。) 以下では式 (2) の仮定により、 r_+ のみを考え、添字 + を落とす。 $r(\theta)$ を微分すると

$$\begin{aligned} r'(\theta) &= -\rho \sin(\theta - \varphi) - \frac{\rho^2 \cos(\theta - \varphi) \sin(\theta - \varphi)}{\sqrt{\rho^2 \cos^2(\theta - \varphi) - 2\rho \cos \varphi + 1}} \\ &= -\frac{\rho \sin(\theta - \varphi)}{\sqrt{\rho^2 \cos^2(\theta - \varphi) - 2\rho \cos \varphi + 1}} r(\theta) \end{aligned} \quad (11)$$

前述のように $r(\theta) > 0$ なので $r' = 0$ となるのは $\theta = \varphi + n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) だけである。

$$r_{max} = r(\varphi) = \rho + \sqrt{\rho^2 - 2\rho \cos \varphi + 1} \equiv \rho + r_0 \quad (12)$$

$$r_{min} = r(\varphi + \pi) = -\rho + \sqrt{\rho^2 - 2\rho \cos \varphi + 1} \equiv -\rho + r_0 \quad (13)$$

当然ながら $r_{max} + r_{min}$ は円の直径 $2r_0$ を与える。また $\rho = 0$ の時は $r_{max} = r_{min} = r_0 = 1$ である。

式 (10) を見ると $r(2\varphi - \theta) = r(\theta)$ が成り立っているので、 $r(\theta)$ は $\theta = \varphi$ に関して対称である。従って $r(2\varphi) = r(0) = 1$ である。一方、 $\rho \neq 0$ であれば

$$r_{min} < r_{max} \quad (14)$$

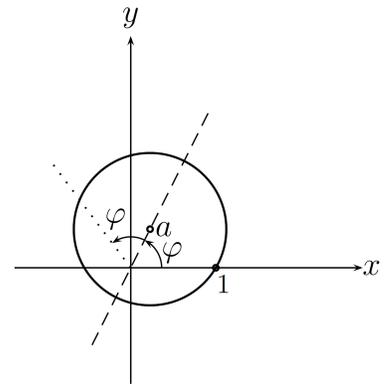


Figure 1: z 平面上の円

であるが、すぐに見るように $\varphi = 0$ の時は $r_{max} = 1$, $\varphi = \pi$ の時は $r_{min} = 1$ となる。
 w 平面上の円の像を調べる。 $z = 1$ は $w = 1$ に写される。極形式を用いると

$$u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta, \quad v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta \quad (15)$$

と書ける。 u の符号は $\cos \theta$ だけで決まっている。従って、 u の符号は x の符号と完全に一致する。 z 平面上の円は原点を囲んでいるので u は正負両方の値を取り、 z 平面上の円の虚軸上の点の像が w 平面上の虚軸上に写される。一方、 v の符号は $\sin \theta$ のみならず $(r - 1/r)$ の符号にも依存する。即ち、 $r = 1$ となる z 平面上の円周上の点の像の位置で v の符号が反転する。以下では個別の状況を考える。

$\rho = 0$ であるとき、 z 平面上の円は原点を中心とする半径 1 の円で恒等的に $r = 1$ なので実軸上の線分、 $-1 \leq u \leq 1, v = 0$ に写される。以下では $\rho > 0$ の場合のみを考える。

$\varphi = \pi/2$ である時、 z 平面上の円において $r = 1$ となるのは $\theta = 0$ と $\theta = 2\varphi = \pi$ の時で、 $r = r_{max}$ となるのは $\theta = \varphi = \pi/2$ の時で、 $r = r_{min}$ となるのは $\theta = \varphi + \pi = 3\pi/2$ の時なので、 $0 < \theta < \pi$ の時、 $(r - 1/r) > 0$ であり、 $\pi < \theta < 2\pi$ の時、 $(r - 1/r) < 0$ である。従って $v \geq 0$ である。さらに

$$r(\theta) = \rho \sin \theta + \sqrt{\rho^2 \sin^2 \theta + 1}$$

より

$$r(\pi + \theta)r(\pi - \theta) = 1$$

が成立するので

$$\begin{aligned} v(\pi + \theta) &= \frac{1}{2} \left(r(\pi + \theta) - \frac{1}{r(\pi + \theta)} \right) \sin(\pi + \theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r(\pi - \theta)} - r(\theta - \pi) \right) (-\sin(\pi + \theta)) \\ &= v(\pi - \theta) \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} u(\pi + \theta) &= \frac{1}{2} \left(r(\pi + \theta) + \frac{1}{r(\pi + \theta)} \right) \cos(\pi + \theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r(\pi - \theta)} + r(\theta - \pi) \right) \cos(\pi + \theta) \\ &= u(\pi - \theta) \end{aligned}$$

従って、像は $\theta = \pi$ で $w = -1$ に達した後、元の軌道を折り返して、 $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ の弧の像は $0 \leq \theta \leq \pi$ の弧の像に完全に一致する (Figure 2)。 z 平面上の円が虚軸に関して対称であることが w 平面上の曲線にも反映して、 u の最大値は $u(0) = 1$ 、最小値は $u(\pi) = -1$ 、 v の最大値が $v(\pi/2) = \rho$ であることが分かる。 $\varphi = -\pi/2$ の時、 $\varphi = \pi/2$ の時の z 平面上の円を実軸に関して反転したもの ($z \rightarrow \bar{z}$) になるのでその像も $\varphi = \pi/2$ の時の像を実軸に関して反転したもの ($w \rightarrow \bar{w}$) になる (Figure 2)。

以下に考える像が Joukowski の翼型と呼ばれるものである。 $\varphi = 0$ の時、 z 平面上の円は実軸に関して反転対称性を持つのでその像も実軸に関して反転対称性を持つ (Figure 3)。 $r(\theta)$ は次のようになる。

$$r(\theta) = \rho \cos \theta + \sqrt{\rho^2 \cos^2 \theta - 2\rho + 1}$$

$r_{max} = r(0) = 1$, $r_0 = 1 - \rho$, $r_{min} = r(\pi) = 1 - 2\rho$ より $\theta = 0$ 以外では $r < 1$ なので $(r - 1/r) < 0$ であり、 z 平面上の点が円周上を正の向きに回る時、その像は原点の回りを負の向きに回る。 $u(\theta), v(\theta)$ の微分は

$$2u'(\theta) = \frac{r'}{r} \left(r - \frac{1}{r} \right) \cos \theta - \left(r + \frac{1}{r} \right) \sin \theta \quad (16)$$

$$2v'(\theta) = \frac{r'}{r} \left(r + \frac{1}{r} \right) \sin \theta + \left(r - \frac{1}{r} \right) \cos \theta \quad (17)$$

$u'(\pi) = 0$ であるが、 $v'(\pi) > 0$ なので $dv/du(\pi) = \infty$ である。一方、 $u'(0) = v'(0) = 0$ であるので、もう少し詳細を検討する必要がある。 $\theta \ll 1$ である時、 $\sin \theta = O(\theta)$, $\cos \theta = O(1)$, $r = O(1)$, $r' = O(\theta)$, $(r + 1/r) = O(1)$, $(1 - 1/r) = O(\theta^2)$ であることが分かるので $u' = O(\theta)$, $v' = O(\theta^2)$ となり、 $dv/du(0) = 0$ であることが分かる。即ち、上半面と下半面からの曲線が $w = 1$ で実軸に接している。

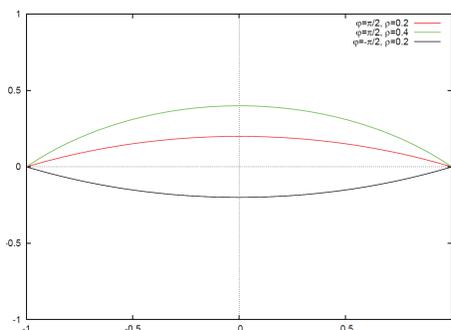


Figure 2: w 平面上の像 ($\varphi = \pm\pi/2$)

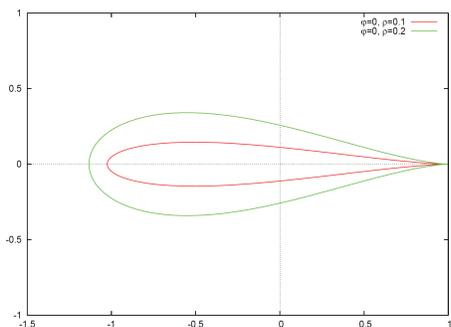


Figure 3: w 平面上の像 ($\varphi = \pm\pi/2$)

$u'(0) = u'(\pi) = 0$ であることから $u_{max} = u(0) = 1$, $u_{min} = u(\pi) = -(1 - 2\rho + 1/(1 - 2\rho))/2$ であることが分かる。 $v'(\theta) = 0$ と置くと

$$\tan \theta = -\frac{r - \frac{1}{r}}{\frac{r'}{r} \left(r + \frac{1}{r}\right)} \quad (18)$$

を得る。この式の右辺は $0 < \theta < \pi$ で負、 $\pi < \theta < 2\pi$ で正である。従って、 $\pi/2 < \theta < \pi$ に v の最小値、 $\pi < \theta < 3\pi/2$ に v の最大値が存在する。従って、 v の最大値、最小値は w 平面の左半平面 ($\text{Re}w < 0$) に存在する。 $\rho \rightarrow 0$ の時、像は実軸上の線分になるので ρ を小さくすると翼の厚みが薄くなることが予想される。逆に $\rho = 1/2$ では $z = 0$ を通るので、 ρ が $1/2$ に近づくと翼の厚みが厚くなると予想される。

$\varphi = \pi$ である時、 $\theta = 0$ 以外では $r > 1$ なので、 z 平面上の点が円周上を性の向きに回る時、その像も原点の回りを正の向きに回る。式 (16)-(18) は今の場合も変わらない。 r' と $(r - 1/r)$ の符号が $\varphi = 0$ の場合と反転するので、式 (18) の右辺の符号は変わらない。従って、 v の最大値、最小値は w 平面の左半平面に存在することも変わらない。

最後に一般の φ に対して考える (Figure 4)。 $-\varphi$ の対する z 平面上の円は φ の対する z 平面上の円を実軸に関して反転したものになるのでその像も実軸に関して反転したものになる。従って、 $0 < \varphi < \pi$ だけを考えれば十分である。しかし、 $\varphi = \pi/2$ では Figure 3 のようになったので、しばらくは $0 < \varphi < \pi/2$ に限って考える。先に見たように z 平面上の円は $\theta = \varphi$ で r が最大に、 $\theta = \varphi + \pi$ で r が最小になり、 $\theta = 0$ と $\theta = 2\varphi$ でのみ $r = 1$ となり、 $0 < \theta < 2\varphi$ で $r > 1$, $2\varphi < \theta < 2\pi$ で $r < 1$ となる。従って、 z 平面上で点 z が円周上を $z = 1$ から正の向きに進む時、その像は $w = 1$ からまず $u, v > 0$ の領域を進み、 $\theta = 2\varphi$ で $v = 0$ となる。その時 $u = \cos 2\varphi$ である、従って、 φ が $\pi/4$ より大きいか小さいかで実軸を切る時の u の符号が変化する。その後、 $v < 0$ の領域を進み、 $\theta = \pi$ で再び実軸を切り、 $v > 0$ の領域を通過して $w = 1$ へ戻る。従って、その軌跡は時計回りである。但し、 $\varphi < \pi/4$ であれば $w = 0$ を囲むが $\varphi > \pi/4$ であれば $w = 0$ を囲まない。 $\varphi = \pi/2$ の時、像は厚みの無い曲線になるので φ が $\pi/2$ に近づくとつれて小さくなると予想される。 $|\theta| \ll 1$ である時、 $r(\theta) = 1 + r'(0)\theta$ なので $du/d\theta \sim (2r'(0) - 1)\theta$, $dv/d\theta \sim 2r'(0)\theta$ より

$$\frac{dv}{du}(0) = -\frac{r'(0)}{1 - r'^2(0)}$$

となる。但し、式 (11) より

$$r'(0) = \frac{\rho \sin \varphi}{1 - \rho \cos \varphi}$$

$\pi/2 < \varphi < \pi$ の場合は $v = 0$ となる $\theta = 2\varphi$ と $\theta = \pi$ の大小関係が入れ替わる。その結果、 z 平面上で点 z が円周上を $z = 1$ から性の向きに進む時、その像は $w = 1$ からまず $u, v > 0$ の領域を進み、 $\theta = \pi/2$ で虚軸を横切って、 $u < 0$ の領域へ入り、 $\theta = \pi$ で $v = 0$ となる。その時、 θ は $2\varphi > \pi$ に達していないので $r > 1$ で $u < -1$ である。その後、 $u, v < 0$ の領域を進み、 $\theta = 2\varphi$ で ($r=1$ となって) 実軸を横切る。その時の u の符号は φ が $3\pi/4$ より小さいか大きいかで異なる。従って、像の軌跡は反時計回りで、 $\varphi > 3\pi/4$ であれば $w = 0$ を囲むが $\varphi < 3\pi/4$ であれば $w = 0$ を囲まない。

反時計回りに回る円周の像について以上をまとめると $a = 0$ であれば実軸上の線分 $[-1, 1]$ 、 $\rho > 0$ であれば Joukowski の翼型になるが、 $\varphi = 0$ であれば実軸に関して対称で原点を時計回りに回り、 $\varphi < \pi/4$ までは原点を時計回りに回り、 $\varphi = \pi/4$ で原点を通過して時計回りに回り、 $\pi/4 < \varphi < \pi/2$ では原点を囲まないで時計回りに回り、 $\varphi = \pi/2$ では翼の厚みが無くなる。 φ が $\pi/2$ を超えると像も反時計回りになるが、 $\varphi < 3\pi/4$ までは原点を囲まない。その後、原点を囲み、 $\varphi = \pi$ で実軸に関して対称になる。 $-\pi < \varphi < 0$ の像は $-\varphi$ の像を実軸に関して反転したものになる。

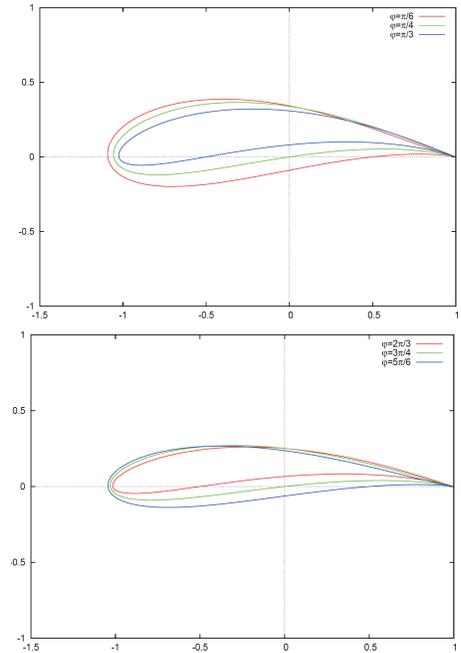


Figure 4: w 平面上の像 ($0 < \varphi < \pi$)