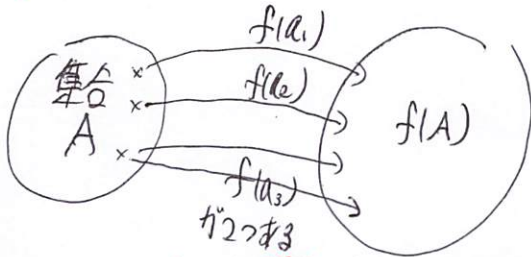


第2章 複素関数と微分

(1) 複素関数

① 写像, 領域
 map domain



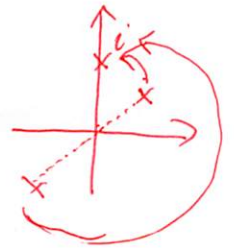
→ 2面関数 (多価関数)

(例) $f(z) = z^{1/2} = \sqrt{z}$

複素平面 \approx 2次元

∴ 複素関数は 2次元空間から 2次元空間への写像 (変換)

$$\sqrt{i} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \end{cases}$$



開円板, 閉円板

$|z - z_0| < r$: 開円板 → こちをよく使う

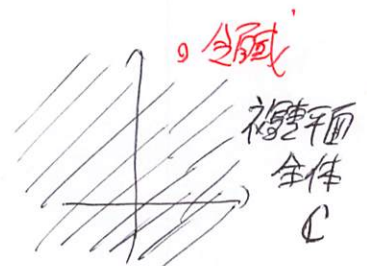
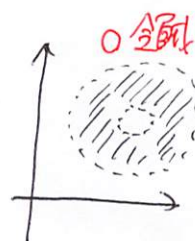
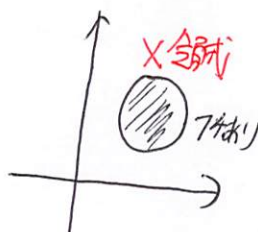
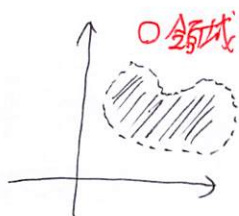
$|z - z_0| \leq r$: 閉円板

領域 (domain) D

複素数の集合 D が領域である

- def \Leftrightarrow {
- ① $\forall z_0 \in D$ に対し、開円板 $|z - z_0| < r$ が D に全く含まれる
 好きな小さな r をとれる
 - かつ
 - ② D 内の任意の 2 点が折れ線で向へる (孤立連結)

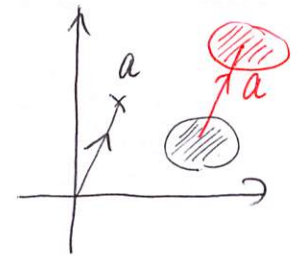
(e.g.)



$C - \{0\}$: 点のみ除外 : 領域

○ 写像の例1: 平行移動

$$f(z) = z + a \quad a = \operatorname{Re} a + i \operatorname{Im} a$$

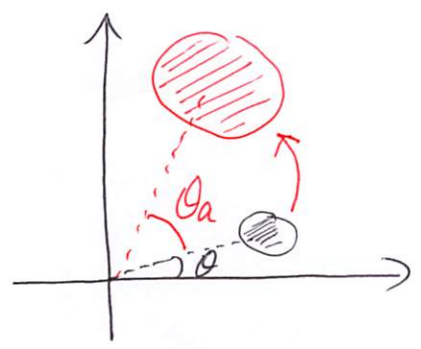


○ 写像の例2: 相似変換

$$f(z) = az = |a| \{ \cos \theta_a + i \sin \theta_a \} \times |z| \{ \cos \theta_z + i \sin \theta_z \}$$

$$= |a| |z| \{ \cos(\theta_a + \theta_z) + i \sin(\theta_a + \theta_z) \}$$

$|a|$ 倍拡大縮小
 θ_a だけ回転



○ 写像の例3: $w = z^2$

半径 r の円周 \Rightarrow 半径 r^2 の円周 倍まわります

x軸に平行な直線: $y = \beta$, $z = x + i\beta$

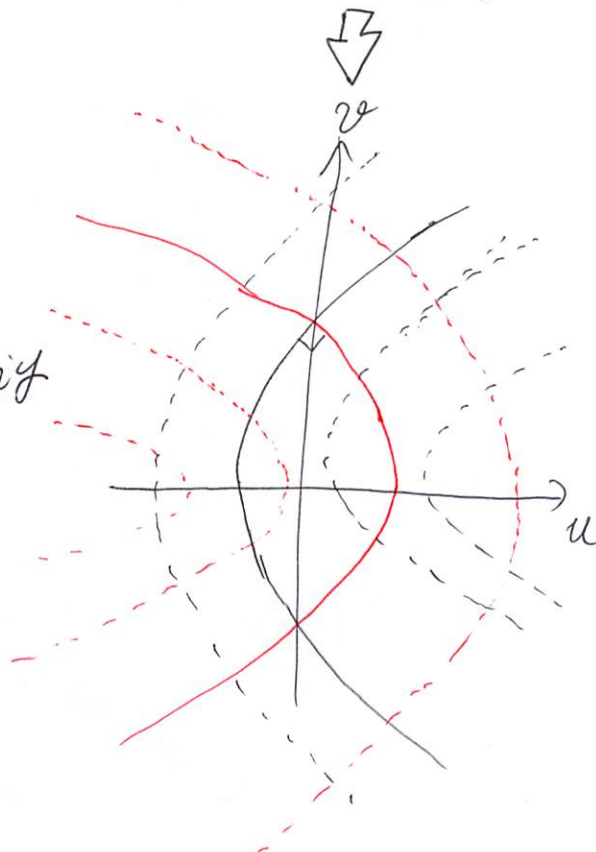
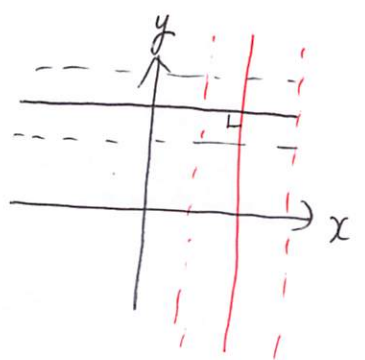
$$w = (x + i\beta)^2 = \underbrace{x^2 - \beta^2}_{\equiv u} + \underbrace{2i x \beta}_{\equiv v}$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{v^2}{4\beta^2} - \beta^2 \quad \text{放物線に成る}$$

y軸に平行な直線: $x = \alpha$, $z = \alpha + iy$

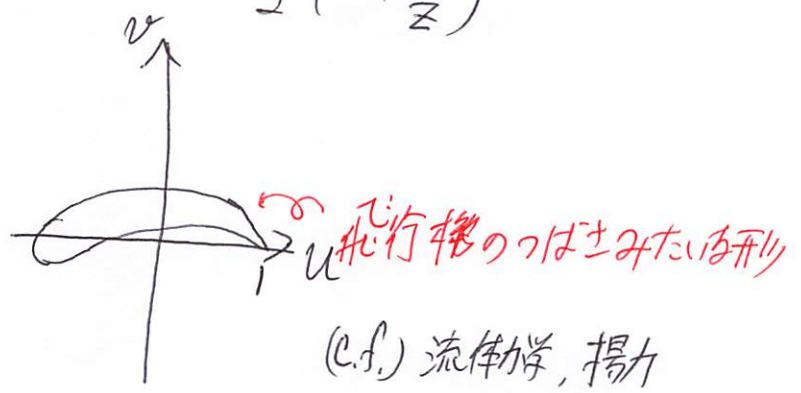
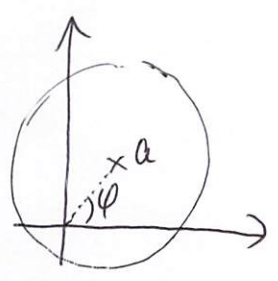
$$w = (\alpha + iy)^2 = \underbrace{\alpha^2 - y^2}_{\equiv u} + \underbrace{2i \alpha y}_{\equiv v}$$

$$u = -\frac{v^2}{4\alpha^2} + \alpha^2 \quad \text{放物線}$$



(c.f.) 正則関数の等角写像である 付録 B, 定理 B.1

写像の例4: ジューゴフスチー変換 $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$



その他教科書 21ページ

★ポイント

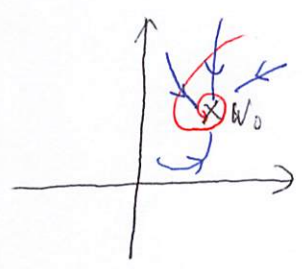
複素関数 (変換) を使って色々な複素相にみる図形を簡単に描ける。
 → でもなにか規則性あって美しい。
 ↑ 複素関数の「等角性」と「周期性」

(e.g.) モンテルロー集合, シュリヤ集合, ...

② 極限値

定理 2.1

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \stackrel{\text{def}}{\iff}$ どんな $z \rightarrow z_0$ に対しても、同じ値 w_0 に近づく
 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t.}$
 $|z - z_0| < \delta$ ならば $|f(z) - w_0| < \epsilon$



極限値の近づく方がある。近づく方によらず、同じ値に近づくときのみ収束。
 ↑ 実数関数との大差違い。

定理 2.1

$z = x + iy, z_0 = x_0 + iy_0, f(z) = u(x, y) + i v(x, y), w_0 = u_0 + i v_0$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \iff \begin{cases} \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} u(x, y) = u_0 \\ \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} v(x, y) = v_0 \end{cases}$$

証明略

定理 2.2

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \alpha, \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \beta$ のとき

$$\lim_{z \rightarrow z_0} k f(z) + l g(z) = k \alpha + l \beta$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) g(z) = \alpha \beta$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (g(z) \neq 0, \beta \neq 0)$$

(例2.4) $R(z) = \frac{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0}$ $a_n, b_m \neq 0$ 有理関数
(c.f.) Padé近似

$$\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = \begin{cases} \infty & (n > m) \\ \frac{a_n}{b_m} & (n = m) \\ 0 & (n < m) \end{cases}$$

(例2.5) $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$ $\downarrow z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$= \cos(-2\theta) + i\sin(-2\theta)$$

θ の値により値が異なる

\Rightarrow 極限存在しない。

(c.f.) \bar{z} や $|z|$, \sqrt{z} などに注意!!

③ 連続関数

定義 2.2

$$f(z) \text{ が } z=z_0 \text{ で連続} \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0. \text{ s.t.}$$

$$|z - z_0| < \delta \text{ ならば } \forall z \text{ で } |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

※ 「近づき方により異なる」

$$f(z) \text{ が領域 } D \text{ で連続} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall z \in D \text{ で } f \text{ が連続}$$

定理 2.3

f, g が連続 $\Leftrightarrow f+g, cf, fg, \frac{f}{g}, g(f(z))$ は全て連続

証明略

定理 2.4

$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ が $z_0 = x_0 + iy_0$ で連続

$\Leftrightarrow u$ と v が両方 $(x, y) = (x_0, y_0)$ で連続

証明略

例 (問 2.7)

f が連続 $\Rightarrow \operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f), |f|$ は全て連続

(2) 複素微分と正則関数 Holomorphic Function, Regular Function, Analytic Function

① 複素微分

図定義 2.3.

$$f \text{ が } z=z_0 \text{ で微分可能} \Leftrightarrow \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \text{ が存在}$$

$\Delta z \rightarrow 0$ の近づけ方によらず、同じ値になる!

(例 2.6) $f(z) = z^n$

$$\begin{aligned} f(z + \Delta z) - f(z) &= (z + \Delta z)^n - z^n \\ &= n z^{n-1} \Delta z + \frac{n(n-1)}{2} z^{n-2} (\Delta z)^2 + \dots \end{aligned}$$

これより

$$f'(z) = \frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1} \text{ 微分可能。7ツ-の実関数の時に同じ}$$

(例 2.7) $f(z) = \bar{z}$

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = e^{-2i\theta} \quad \begin{matrix} \Delta z = |\Delta z| e^{i\theta} \text{ (c.f.) 例 2.5} \\ \curvearrowright \end{matrix}$$

θ の値によつて θ 微分不可能

*1 \bar{z} や $|z|$ などが発する関数は注意!

*2 z について多項式や、実数で滑らかな関数 $f(t)$ を $t \rightarrow z$ にした関数は、微分可能存じ打ほとんど!

(c.f.) 一致の定理と解析接続

定理 2.5

f と g が微分可能

$$\Rightarrow \begin{cases} \circ \{kf(z) + lg(z)\}' = kf'(z) + lg'(z) \\ \circ \{f(z)g(z)\}' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z) \\ \circ \left\{ \frac{f(z)}{g(z)} \right\}' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{\{g(z)\}^2} \\ \circ \{g(f(z))\}' = g'(f(z))f'(z) \end{cases}$$

証明略。(実数関数の時と証明法は同じ)

~~予想: 微分可能性~~

~~f(z) = u(x,y) + i v(x,y) が微分可能~~

~~⇔ u と v がともに微分可能~~

まちがいの!!

定理 2.6 微分可能性の必要条件

f = u(x,y) + i v(x,y) が z₀ = x₀ + iy₀ で微分可能

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

コーシー・リーマン関係式 (条件)

↑ 注意. 忘れる

→ 最も重要な式の一つ

を u と v は満たす。

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

☆ 実部 と 虚部 は 滑らかな複素関数では一対一対応してしまう

☆ 実軸方向の変化と虚軸方向の変化は 意味「同じ」にとらえない!!

証明

$\Delta z = \Delta x$ のとき 実軸で近づける

$\Delta z = i\Delta y$ のとき 虚軸の方から近づける

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$f'(z_0) = \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

↑
等しい

⇨ Cauchy-Riemann 関係式

「実軸で近づけたも、虚軸で近づけたも
微分値は同じだよ！」

系：コーシーリーマン関係の対偶

f がコーシーリーマン関係を満たさない $\Rightarrow f$ は微分不可能

(例 2.4) $f(z) = z^3 = (x+iy)^3 = \underbrace{(x^3 - 3xy^2)}_{\equiv u} + i \underbrace{(3x^2y - y^3)}_{\equiv v}$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 & \xleftrightarrow{\text{等しい}} \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy & \xleftrightarrow{\times(-1)} \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy \end{cases}$$

\Rightarrow コーシーリーマンを満たす。微分可能

(例 2.5-1) $f(z) = x^2 + iy^2$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x & \frac{\partial v}{\partial y} = 2y \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 & \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x \neq y$ なら微分可能。 ($x=y$ なら微分可能)

定理 2.7.

(例 2.5-2) $f(z) = x^3 - iy^3$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 & \frac{\partial v}{\partial y} = -3y^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 & \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

⇒ $x \neq 0, y \neq 0$ なら微分不可能 ($x=y=0$ なら微分可能)
定理 2.7.

② 正則関数

z_0 の ρ 近傍 $U_\rho(z_0) = \{z : |z - z_0| < \rho\}$
色付 ρ の値の $U_\rho(z_0)$ を「近傍」と総称.

定義 2.4.

$f(z)$ が $z=z_0$ で正則 \iff f が $z=z_0$ の 近傍 $U(z_0)$ で
微分可能 で f' が連続.
C' 級

f が 全領域 D で正則 $\iff \forall z \in D$ で f が正則

(例) 有理関数 $R(z) = \frac{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0}$

- (分母) $\neq 0$ なら正則
- (分母) $= 0$: 特異点 *Singular point, singularity*

定理 2.7 微分可能性 \approx コーシー-リーマン性

f が D で正則 \iff $\begin{cases} \text{(i)} \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \text{ が } D \text{ で存在し連続} \\ \text{かつ} \\ \text{(ii) コーシー-リーマン方程式を } D \text{ 上で満たす} \end{cases}$

* コーシー-リーマンの微分条件を左向きすれば、他の全方向も自動的に OK!

証明 必要性 (\Rightarrow) については定理 2.6 で証明済.

2-11

十分性 (\Leftarrow) の証明.

(i) より u と v は全微分可能で

$$\begin{cases} u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + O(\Delta^2) \\ v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + O(\Delta^2) \end{cases}$$

そこで $f = u + iv$ について,

$$\begin{aligned} f(z+\Delta z) - f(z) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Delta y + O(\Delta^2) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) (\Delta x + i \Delta y) + O(\Delta^2) \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + O(\Delta z)$$

Δz の極限のとりかたによらず、 $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$ と書き微分可能

\Leftrightarrow 正則

(例 2.8) $f(z) = \frac{x+y}{x^2+y^2} + i \frac{x-y}{x^2+y^2}$ ← 実は $f(z) = \frac{1+i}{z}$ (例 2.9)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2 - 2xy - y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-x^2 + 2xy + y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

\Leftrightarrow コーシー-リーマンみたすので $z=0$ を除き $\forall z \in \mathbb{C}$ で正則

例題 2.6

$F = u(x, y) + i v(x, y)$ が正則 $\Leftrightarrow F$ は z のみの関数として表わせる。

証明

$$F = u(\underbrace{z-iy}_{=x}, y) + i v(\underbrace{z-iy}_{=x}, y)$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{z=fix} = (-i) \frac{\partial u}{\partial x}(z-iy, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(z-iy, y) + i \left[\frac{\partial v}{\partial y}(z-iy, y) + (-i) \frac{\partial v}{\partial x}(z-iy, y) \right]$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + i \left(-\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$= 0$ ↙ コーシー-リマン

よって F は z のみの関数で書ける!

問 2.11

- (証明)

$$x^2 - y^2 + i 2xy = (x+iy)^2 = z^2 \Rightarrow \text{正則}$$

コーシー-リマン使わずともわかる

例題 2.7

f が ①~③ のいずれかを満たすなら、 f は定数 in 領域 D

- ① $f'(z) = 0$ for $\forall z \in D$
 - ② $u(x, y) \equiv \text{定数}$. または $v(x, y) \equiv \text{定数}$ for $\forall z \in D$
 - ③ $|f(z)| \equiv \text{定数}$ for $\forall z \in D$
- *一部だけ平らにできる
⇒実関数との大いなる違い!!

証明

12-B

$$\textcircled{1} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$\Rightarrow u$ と v は D 上で定数 $\Rightarrow f$ 定数

$$\textcircled{2} \Rightarrow \text{コーシー-リーマンより} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \text{ で } v \text{ 定数}$$

$\Rightarrow f$ 定数

$$\textcircled{3} \quad |f(z)| = k = \text{定数}$$

$k \neq 0$ とする ($k=0$ 有り自明に $f = \text{定数}$)

$$|f(z)|^2 = u^2 + v^2 = k^2$$

微分

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\neq 0}$

行列の \det は 0 であるので

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 = |f'(z)|^2$$

\uparrow
コーシー-リーマン

$\Rightarrow f'(z) \equiv 0$ であり $f = \text{定数}$

★ 実部 \longleftrightarrow 虚部 勝手にかたに決められる
C.R.

(例 2.8) $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$ のとき、 $v(x,y)$ をどう取れば $u+iv$ が正則?

コシーリーマン

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = -6xy & \xrightarrow{\text{積分}} v = -3xy^2 + g(x) \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -3y^2 + 3x^2 & \xrightarrow{\text{積分}} v = -3xy^2 + x^3 + h(y) \end{cases}$$

$\Rightarrow v = -3xy^2 + x^3 + \text{定数}$

(c.f.) $f(z) = iz^3 + ix$ (定数)

(例 2.9) v からも u を再構成できる

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$= \frac{\partial v}{\partial y}$ $= -\frac{\partial v}{\partial x}$

同様か v も成立

\Rightarrow 正則関数 $f = u + iv$ の実部と虚部は

$\Delta u = 0, \Delta v = 0$ Laplace 微分方程式: 重畳微分方程式

をみたす。 調和関数 である (共役 $u \rightleftharpoons v$)

- 波動方程式 (定常解)
- シュレディンガー方程式 ($E=0, V=0$)

美しい性質を持つ特別な関数の family
 \Rightarrow 複素正則関数が様々な美しい性質を示す。