

量子少数系におけるユニバーサリティとEfimov[1]状態の物理[2]

遠藤 晋平
東北大学　学際科学フロンティア研究所、理学研究科物理学専攻

多粒子系が示す相転移・臨界現象には、気液相転移と強磁性転移のように、全く異なる系を統一的に理解できる「ユニバーサリティ」という重要な概念があります。実は少数粒子系においても、原子、原子核、固体電子系などが全く同じ量子少数系の現象を示すことがあり、このようなユニバーサリティに注目した研究が進んでいます。本講義では、量子少数系の物理を、ユニバーサリティに着目しながら解説します。まず、量子少数粒子系を記述する理論手法を学部レベルの量子力学のみを用いて説明し、粒子間の散乱長とユニバーサリティの関係を解説します。そして、ユニバーサルな量子少数現象の代表例であるEfimov状態と呼ばれる3粒子現象について解説し、これが原子、原子核、固体電子系など様々な系で普遍的に現れることを、原子気体、原子核、中性子過剰核での実験観測や、固体電子系（磁性体）での理論予言などと併せて紹介します。また、Efimov状態以外のユニバーサルな量子少数現象や、4粒子、5粒子以上での普遍的な量子少数多体現象に関する最近の研究についても紹介します。

目 次

1 Introduction **2**

2 2体問題 **4**

2.1 低エネルギー散乱と有効レンジ展開 5
2.2 束縛状態、バーチャル状態、共鳴状態 7
2.3 散乱長と有効レンジの物理的意味と性質 8
2.4 擬ポテンシャル (Pseudo potential) の方法 12
2.4.1 実空間での解析に適した方法 12
2.4.2 運動量空間での解析に適した方法 14

[1]Efimov の正しい発音は「ィエ**フィ**モォフ」(フィにアクセントが来る)。

[2]この講義録は 2019 年 2 月 25 日-27 日に、京都大学基礎物理学研究所で行われた集中講義の講義録です (2026 年 10 月 17 日誤植改定版)。

2.5 冷却原子における Feshbach 共鳴による散乱長の制御[3] 16
2.6 物理系への適用例 17

3 3 体問題の理論的手法 18
3.1 実空間の方法：Hyper-spherical 座標の方法 19
3.2 運動量空間の方法：Skorniakov–Ter-Martirosian 方程式の方法 28
3.3 Efimov 状態のユニバーサリティ 31

4 Efimov 状態の物理的理解をさらに深める理論 32
4.1 Born-Oppenheimer 近似 32
4.2 繰り込み群 36
4.3 Finite-range effects と現実的なモデルポテンシャルにおける Efimov 状態の挙動 . . 38

5 物理系における Efimov 現象の観測・予言 39
5.1 冷却原子気体 39
5.2 ^{4}He 原子クラスター 43
5.3 三重水素 ^{3}H 核 44
5.4 ^{12}C 核の励起状態 (Hoyle 状態) 46
5.5 中性子過剰核・ハロー核 47
5.6 磁性体 50
5.7 Dynamical Efimov expansion 51

6 Efimov 状態を超えて 52
6.1 4 体、5 体、6 体…… 53
6.2 量子少数系と多体系のつながり 55
6.3 フェルミ粒子系における Efimov 状態や、Efimov 状態と異なるユニバーサル状態 . 57

7 まとめ 62

1 Introduction

2018 年に Vitaly Efimov と Rudolf Grimm が第一回 Faddeev Medal を受賞しました。これは、量子少数系の研究で著名な Faddeev の名を冠した、少数系の顕著な研究に対して贈られる賞です。その受賞内容は、1970 年にロシア人の Vitaly Efimov が理論的に予言した特異な 3 粒子束縛状態を [1]、2000 年代にオーストリアの Rudolf Grimm のグループが冷却原子の実験で初めて明瞭に観測した [2]、というものです。この 3 粒子束縛状態は、現在では Efimov 状態と呼ばれており、多くの非常に興味深い性質を持ちます。最も特徴的なものは離散スケール不変性です：3 粒子束縛状態が 1 つ存在すれば、それを 22.7 倍に拡大した形 (波動関数) をもつ状態も存在し、さらに 22.7 倍した状態も存在する……ということが無限に続きます。Efimov 状態のこの性質を、発見し

[3] Feshbach はドイツ人ではなくアメリカ人で、正しくは「フェッシュバック」と発音します。ただし、国内・海外ともに「フェッシュバッハ」と発音されることも多いです。また、類似の Fano 共鳴と呼ばれる現象を原子分子物理学の分野で発見した Fano と併せて、「Fano-Feshbach 共鳴」と呼ばれることもあります。

たEfimovがロシア人であることにかこつけて、ロシア人形のマトリョーシカのような状態と喩えることもあります。同じ形でサイズ違いの人形が次から次へと現れていく様子は、まさにEfimov状態の最も身近で分かりやすい喩えになっています。

このEfimovの予言は以下のたった2つの仮定のもとに厳密に示されました[1, 3]：

条件１ 非相対論的Schrödinger方程式に従う3つの同種ボース粒子。

条件２ 粒子間の2体相互作用は短距離型相互作用であり、そのs波散乱長が非常に大きい。

つまり、この仮定が成立していれば、どのような物理系であっても22.7という普遍定数をスケール因子として持つ多数の3体束縛状態が必ず現れるのです。この非常に一般的で驚くべき発見は、Efimovが発表した当初は他の研究者に懐疑的に受け止められたようです。しかし、Efimovの予言を間違っていると思い反証しようとした人々も逆にEfimovと同じ結論を得る[4]などし、少しずつ正しいだろうと受け入れられていったようです。また、同種ボース粒子系のみならず、フェルミ粒子系や異種粒子混合系においても粒子間のs波散乱長が非常に大きければ、やはりEfimov状態が現れることも発見されました[3]。さらに、^{4}He原子のクラスター[5]や中性子過剰核のハロー状態[6]においてもEfimov状態やそれに類する状態が現れるという予言もされるようになり、徐々に人々の注目を集めるトピックになっていきました。しかし「散乱長が非常に大きい」という条件を満たす物理系は自然界では非常に稀なため、Efimovの予言を明瞭に観測することは長い間できなかったのです。

ところが2000年ごろになり、冷却原子気体の実験において、粒子間の散乱長を自由自在にコントロールできる技術が確立しました。この技術を用いて条件2を満たす原子気体を用意することで、Efimov状態がインスブルック大学のGrimmのグループで初めて明瞭に観測されました。その後、2009年に他の3つの実験グループも独立にEfimov状態を観測し、その予言である「22.7倍」という普遍的スケール因子を検証することに成功しました[7, 8, 9]。また、2015年には^{4}He原子のクラスターにおいてもEfimov状態が観測され、その波動関数の形状の直接観測にも成功しています[10]。

このEfimov状態に関する50年以上の歴史をEfimov自身も次のように回想しています[11]:
“On a personal note, I well remember the time when the giant trimers made outstanding physicists raise their eyebrows. It has been heartening to witness the evolution of this miracle of quantum mechanics from questionable to pathological to exotic to being a hot topic of today’s ultracold physics. The fairytale is becoming a reality.”
彼が「hot topic」と言う通り、Efimov状態に関する研究は、冷却原子、^{4}He原子のクラスター、Efimovが原論文で考察した三重水素核や^{12}CのHoyle状態のみならず、中性子過剰核やハドロン系の3体状態など、様々な物理系で行われています。表1に、現在Efimov状態が観測されている、もしくは現れるだろうと理論的に予言されている物理系を列挙します。これらの系では、粒子間相互作用の性質やその起源が全く異なり、エネルギースケールは最大19桁も異なります。そのように全く階層・スケール・分野が異なる系であるにもかかわらず、「とある条件の下で」これらの系で現れる3粒子現象がEfimov理論で統一的に理解できる。そして「22.7」という普遍定数による離散スケール不変性が現れるのです。

本講義では、このEfimov状態の物理を、特にそのユニバーサリティという側面に着目しながら解説します。まず第2節と第3節では、Efimov状態の理論的背景として、2体・3体問題の比較的

表 1: Efimov 状態が観測・予言された物理系の一覧。◎：Efimov 状態が基底状態のみならず励起状態まで観測され、明確に実証された系。○：Efimov 状態の基底状態と見られる 3 体状態が 1 つ観測されたが、有限レンジ効果等によりその同定が明確ではない系。×：未観測の系。束縛エネルギーは、3 粒子がバラバラになる閾値 (3-body continuum threshold) から測った値。ただし Hoyle 状態は閾値の上にある共鳴状態であり、閾値から測った共鳴エネルギーを示す。

物理系	構成要素	束縛エネルギー	大きさ	2 体相互作用の性質	観測
冷却原子	原子 3 つ	10 nK -10 mK	10-500 nm	原子間力 (短距離斥力+r^{-6} 遠方引力)	◎
^{4}He クラスター	^{4}He 原子 3 つ	2.6 mK (励起状態) 132 mK (基底状態)	1-10 nm	原子間力 (短距離斥力+r^{-6} 型遠方引力)	◎
三重水素 ^{3}H 核	陽子 1 つ +中性子 2 つ	8.48 MeV (1 MeV=1.2 × 10^{10} K)	1.6 fm	NN 相互作用 (短距離斥力+$e^{-\mu r}/r$ 型遠方引力)	○
^{12}C 核 (Hoyle 状態)	α 粒子 3 つ	0.378 MeV	数 fm	α 粒子間の核力+Coulomb 斥力	○
中性子過剰核 (ハロー状態)	中心核 1 つ +中性子 2 つ	$\lesssim$ 数 MeV	1-10 fm	中心核と中性子の間の核力 +中性子 (↑↓ スピン) 間の相互作用	○
磁性体	マグノン 3 つ	~0.1-10 K	0.1-10 nm	マグノン間相互作用 (on-site, nearest-neighbor 相互作用)	×

フォーマルな記述と、Efimov 状態を記述する理論を解説します。そして第 4 節では Efimov 状態の重要な性質を解説していきます。第 5 節では、冷却原子、^{4}He 原子のクラスター、三重水素 ^{3}H 核、^{12}C 核の Hoyle 状態、中性子過剰核のハロー状態、固体電子系といった実際の物理系において、Efimov 状態がどのように現れ得るかを、現状の実験観測も交えて紹介します。第 6 節では Efimov 状態のパラダイムを拡張するような最近の研究をいくつか紹介します。特に、(i)4 粒子、5 粒子、6 粒子系ではどうなるか？、(ii) 量子多体現象と 3 体現象 (Efimov 状態) との関係、(iii)Efimov 状態と異なるユニバーサルな 3 粒子束縛状態、などについて解説します。本講義録以外にも、Efimov 状態については英語のレビュー論文や解説記事がいくつかあります [12, 13, 14, 15, 16, 17]。特に 2017-2018 年に出版された 3 つのレビュー論文 [15, 16, 17] には最近の研究まで紹介されているので、より深く理解したい方はそちらもご参照ください。

2　2 体問題

2 粒子の非相対論的 Schrödinger 方程式を考えます[4]。重心運動と相対運動は分離でき、相対運動の波動関数 $\psi(\boldsymbol{r})$ は (この講義録を通して $\hbar = 1$ とします)

$$\left[-\frac{1}{2\mu_{12}}\nabla_{\boldsymbol{r}}^2 + V(\boldsymbol{r})\right]\psi(\boldsymbol{r}) = E\psi(\boldsymbol{r}), \tag{1}$$

という Schrödinger 方程式を解くことで得られます。ここで $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2}$ は 2 粒子の相対座標、$\mu_{12} = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ は換算質量です。中心力 $V(\boldsymbol{r}) = V(r)$ で相互作用する球対称な場合、角運動量 ℓ が良い量子数になり、

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \psi_\ell(r) Y_{\ell,m}(\hat{\boldsymbol{r}}) \tag{2}$$

[4]通常の量子力学の教科書 [18] などを参照。

と、固有状態は角運動量の固有状態で表されます。そのため、波動関数の遠方での挙動

$$\psi(\boldsymbol{r}) \to e^{ikz} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r} \quad (r \gg b) \tag{3}$$

を特徴づける散乱振幅 $f(\theta)$ についても

$$f(\theta) = \sum_{\ell}(2\ell+1)f_\ell(k)P_\ell(\cos\theta) \tag{4}$$

と部分波展開ができます。ℓ 波散乱の散乱振幅は

$$f_\ell(k) = \frac{S_\ell(k)-1}{2ik} = \frac{1}{k\cot\delta_\ell(k) - ik} \tag{5}$$

のように ℓ 波の位相シフト (phase shift)$\delta_\ell(k)$ と、S 行列 $S_\ell(k) = e^{2i\delta_\ell(k)}$ を用いて表せます。実際、$V(r)$ が短距離型で、$r \gtrsim b$ において $V(r) = 0$ とみなせるような有限の到達距離 b が定義できる場合、波動関数の部分波は遠方で

$$r\psi_\ell(r) = \begin{cases} \text{複雑な挙動} & (r \ll b) \\ \sin\left[kr - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_\ell(k)\right] & (r \gg b) \end{cases} \tag{6}$$

となり、$V(r) = 0$ の場合の波動関数 $\sin\left[kr - \frac{\ell\pi}{2}\right]$ と比べて、位相が δ_ℓ だけずれています。散乱振幅は、散乱微分断面積 $d\sigma/d\Omega$ や散乱断面積 σ と

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \qquad \sigma = 4\pi\sum_{\ell}(2\ell+1)|f_\ell(k)|^2 \tag{7}$$

のように関係しています。従って、散乱振幅が「散乱の強さ」を測る指標になっています。特に、以下の特徴的な位相シフトの値があります。

最小の位相シフト　$\delta_\ell = \pi n$ $(n = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$: 遠方では、あたかもポテンシャルが無いかのように波動関数が振る舞います。

最大の位相シフト　$\delta_\ell = +\frac{\pi}{2} + \pi n$: ユニタリー極限 (unitary limit)、あるいはユニタリー散乱と呼びます。実際、弾性散乱の場合は S 行列はユニタリー行列であり、その条件 $|S_\ell(k)| = 1$ から導かれる不等式

$$|f_\ell(k)| = \frac{|S_\ell(k)-1|}{2k} \le \frac{|S_\ell(k)|+1}{2k} = \frac{1}{k} \tag{8}$$

の等号が成り立つための必要十分条件が、この位相シフトの値です。そのため、ユニタリー極限は弾性散乱の強さの上限 (極限) を与えています。

2.1　低エネルギー散乱と有効レンジ展開

陽子や中性子といった核子間に働く相互作用のように、遠方で指数関数的に減衰する短距離型相互作用 $V(r)$ の場合、低エネルギー $k \to 0$ で、有効レンジ展開

$$k^{2\ell+1}\cot\delta_\ell(k) = c_0 + c_1k^2 + c_2k^4 + \cdots \tag{9}$$

ができることが知られています。これより、低エネルギー $k \to 0$ では $f_\ell(k) \propto k^{2\ell}$ かつ $\delta_\ell \propto k^{2\ell+1}$ となります。すなわち、低エネルギー散乱では、角運動量の大きな散乱は無視でき、$\ell = 0$ の s 波の散乱のみが効きます。s 波散乱は特に

$$k \cot \delta_0(k) = -\frac{1}{a} + \frac{r_{\rm eff}}{2} k^2 + O(k^4), \tag{10}$$

と展開されます。ここで、a は s 波散乱長 (s-wave scattering length)、$r_{\rm eff}$ は有効レンジ (effective range) と呼ばれます。この有効レンジ展開を用いることで、散乱振幅は式 (5) より

$$f_0(k) = \frac{1}{-1/a + \frac{r_{\rm eff}}{2} k^2 - ik}, \quad f_{\ell>0}(k) = 0 \tag{11}$$

と低エネルギーで振る舞うことが分かります。

有効レンジ展開は、核子間の相互作用のように遠方で指数関数的に減衰する場合にはそのまま使える一方、原子分子に対して適用する際には注意が必要です。冷却原子で扱う中性原子間には、遠方で van der Waals 相互作用が働き、$-1/r^6$ のように減衰します。これは上記の指数関数的に減衰するポテンシャルの場合とやや異なります。$-1/r^6$ 型の相互作用をする 2 体問題の解析解は知られていて[5]、それによると、式 (9) は以下のように修正が必要です [18, 22, 23]:

$$k \cot \delta_{\ell=0}(k) = -\frac{1}{a} + \frac{r_{\rm eff}}{2} k^2 + O(k^3), \tag{12}$$

$$k^3 \cot \delta_{\ell=1}(k) = -\frac{1}{v_p} + r_P^{(1)} k + O(k^2), \tag{13}$$

$$k^4 \cot \delta_\ell(k) = r_\ell^{(0)} + O(k) \ \ (\ell \geq 2). \tag{14}$$

v_p は p 波散乱体積 (scattering volume) と呼ばれます[6]。式 (9) と若干異なる部分もありますが、いずれにせよ $k \to 0$ で式 (11) が成立します。これは、短距離型であればどのようなポテンシャルでも成り立ちます。次節では式 (11) から得られる 2 体の束縛状態・共鳴状態などの性質を議論しますが、その結果は原子核でも原子でも物質中の素励起でも、どのような系にも広く当てはまります。その意味でユニバーサルな結果です。さらに言えば、たとえ系が一見異なっても散乱長・有効レンジの値が同じであれば、式 (11) が同じになり、観測される現象も全く同じになります。そのような意味で**量子 2 体問題は散乱長と有効レンジによってユニバーサルに記述できます**。非常に低エネルギーで式 (11) がさらに

$$f_0(k) = \frac{1}{-1/a - ik} \tag{15}$$

と近似できる場合、**量子 2 体問題は散乱長によってユニバーサルに記述できます。**

[5] $1/r^n$ 型相互作用の 2 体問題については、$n = 1, 2, 3, 4, 6$ の場合に解析解が知られています。これらは、Coulomb 相互作用、Efimov 型相互作用、Dipole-Dipole 相互作用 [19]、荷電粒子-中性原子間相互作用 [20, 21]、van der Waals 相互作用のべきにそれぞれ対応しており、原子分子物理で重要なべき型相互作用については、ほとんど解析解が見つかっています。しかし、$n = 5$ の場合の解析解は未発見です。

[6] ここで、$\ell \geq 2$ で $\delta_\ell(k) \propto k^4$ になる理由は、Born 近似を用いると $f(k) \propto \int d^3r\, V(r) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \propto k^3$ となることと $f_\ell(k) \propto \delta_\ell(k)/k$ などから理解できます。

「低エネルギー」の条件　一般に、ポテンシャルの到達距離 b と比べて $k \ll b^{-1}$ が成立すれば式 (11) が成立します。中性原子の場合、原子間の van der Waals 相互作用 $-C_6/r^6$ の特徴的な到達距離 $r_{\mathrm{vdw}} = \frac{1}{2}(mC_6)^{1/4}$ が b を与えます。冷却原子の実験で通常用いられる原子では $b \sim r_{\mathrm{vdw}} = 1$–$10$ nm であり、これはエネルギースケールに直すと $1/mr_{\mathrm{vdw}}^2 = 100\,\mu$K 程度です。常温の原子はこの条件を満たしませんが、冷却原子気体の実験は $T \lesssim 1\,\mu$K で行われるため、式 (11) が非常に良く成立します。一方、原子核やハドロン系の場合には、低エネルギー条件 $k \ll b^{-1}$ は一般には成立しません。しかし、後で紹介する重陽子や一部の中性子過剰核などでは近似的に良く成立する場合があります。

本当に s 波だけでいいの？　もし p 波散乱体積が偶然、あるいは何らかの理由で非常に大きくなっていると、それが散乱振幅に重要な寄与をすることがあります。ゼロエネルギー付近に p 波の状態が存在する場合や、冷却原子の p 波 Feshbach 共鳴の実験 [24] は、まさにそのような場合に該当し、v_p や $f_\ell(k)$ をちゃんと考える必要があります。特に、同じスピン状態にある同種フェルミ粒子では反対称性から s 波散乱が禁止されるので、p 波散乱を考える必要がある場合があります。また、エネルギーがそれほど小さくない場合 ($E \lesssim 1/mb^2$) には、$\ell \geq 1$ の寄与 ($\delta_\ell \propto k^{2\ell+1}$) が補正 (subleading な効果) として効いてくることもあります。

2.2　束縛状態、バーチャル状態、共鳴状態

散乱振幅の発散を与える k は式 (11) より

$$k = \begin{cases} k_{a,\pm} = \pm\sqrt{\frac{2}{ar_{\mathrm{eff}}} - \frac{1}{r_{\mathrm{eff}}^2}} + \frac{i}{r_{\mathrm{eff}}} & (\frac{r_{\mathrm{eff}}}{a} \geq \frac{1}{2}) \\ k_{b,\pm} = \frac{i}{r_{\mathrm{eff}}}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2r_{\mathrm{eff}}}{a}}\right] & (\frac{r_{\mathrm{eff}}}{a} \leq \frac{1}{2}) \end{cases} \tag{16}$$

となり、これらの解の位置によって、以下のように 2 体状態を分類できます[7]。

- 正の虚軸上 $k = i\kappa$：束縛状態 $E = k^2/2\mu_{12} = -\kappa^2/2\mu_{12}, \psi(r) \propto e^{-\kappa r}/r$ として実在している。
- 負の虚軸上 $k = -i\kappa$：バーチャル状態。遠方で well-behaved という条件を満たさないため実在しない。
- 第四象限 ($\mathrm{Re}[k] > 0, \mathrm{Im}[k] < 0$) かつ $\mathrm{Re}[k] > |\mathrm{Im}[k]|$：共鳴状態 (resonant state)。$E = E_0 - i\Gamma$ $(E_0 > 0, \Gamma > 0)$ の有限寿命・有限エネルギー幅を持った準安定状態として実在。

$|r_{\mathrm{eff}}/a| \ll 1$ の場合　式 (16) の第 2 行目に相当。特に「$-$」の方 $k_{b,-}$ だけに注目すると：

- $a > 0$: 束縛状態が存在し、$k = i/a$。すなわち

$$E = -\frac{1}{2\mu_{12}a^2} \tag{17}$$

- $a < 0$: 束縛状態なし。バーチャル状態 $k = i/a$ のみ存在。

となり、$1/a = 0$ が 2 体問題の挙動を変える「臨界点」になっています。実はこの臨界点はユニタリー極限 $\delta_0 = \pi/2$ に対応しています。式 (15) を用いても同じ結果が得られます。

[7] この節の以下の議論はやや発展的な内容を含み、以降で Efimov 状態の物理を解説する際にも必要ないので、初学者は Sec. 2.2 を読み飛ばしても構いません。

$r_{\rm eff} > 0$ **の場合**　エネルギースペクトルと極 k の位置は図 1 のように振る舞います：

- $a < 0$: 束縛状態 $k_{b,+}$ が 1 つ（図 1 の橙丸）。バーチャル状態 $k_{b,-}$ が 1 つ（図 1 の青丸）存在。
- $0 < 1/a < 1/2r_{\rm eff}$: 束縛状態が 2 つ $k_{b,\pm}$ 存在。特に $k_{b,-}$(図 1 の青丸・実線) が $1/a = 0$ 付近で式 (17) と振る舞う。
- $1/a > 1/2r_{\rm eff}$: 複素 k 平面上で束縛状態 2 つの極が衝突した結果、第 1 ・ 2 象限に $k_{a,\pm}$ が出現。有限寿命を持つ状態になる。

散乱長を変えていくと、$a > 0$ の領域で束縛状態が突然寿命を持ち始めるように一見みえます。この unphysical な現象は $k \sim r_{\rm eff}^{-1} \sim b^{-1}$ で起きており[8]、有効レンジ展開の条件「$k \ll b^{-1}$」を満たしていないのに式 (11) を使ったことによる artefact です。よって、図 1 は $r_{\rm eff}/|a| \ll 1$ でのみ正しいと解釈すべきです。

$r_{\rm eff} < 0$ **の場合**[9]　エネルギースペクトルと極 k の位置は図 2 のように振る舞います：

- $1/a < -1/|r_{\rm eff}|$: 第三象限と第四象限に 1 つずつ $k_{a,\pm}$ が存在。第四象限にある $k_{a,+}$(図 2 の青丸) は $E = E_0 - i\Gamma$ $(E_0 > 0, \Gamma > 0)$ のような共鳴状態で有限寿命を持つ (図 2 右図の青領域)。第三象限にある $k_{a,-}$(図 2 の橙丸) はその複素共役な状態。
- $-1/|r_{\rm eff}| < 1/a < -1/2|r_{\rm eff}|$: 第四象限の $k_{a,+}$(図 2 の青丸) は $E = E_0 - i\Gamma$ $(E_0 < 0, \Gamma > 0)$ の負のエネルギーで有限寿命を持つ状態。$k_{a,-}$ はその複素共役に相当する状態。
- $-1/2|r_{\rm eff}| < 1/a < 0$: 束縛状態なし。バーチャル状態が 2 つ存在。
- $1/a > 0$: 束縛状態 $k_{b,-}$（図 2 の青丸）が 1 つとバーチャル状態 $k_{b,+}$（図 2 の橙丸）が存在。

これらの一見不思議な変化は $k \sim |r_{\rm eff}|^{-1}$ のあたりで起こります。もし $|r_{\rm eff}| \sim b$ であれば、やはり低エネルギー条件 $k \ll b^{-1}$ を満たさないため unphysical な現象といえます。しかし次節で述べるように $r_{\rm eff}$ は負に発散的に大きくなることがあります。そのような場合、低エネルギー条件 $k \ll b^{-1}$ を満たしながら上記の現象が実際に起こりうるのです。

2.3　散乱長と有効レンジの物理的意味と性質

$k \to 0$ で $f_0(k) = -a$、$\sigma = 4\pi a^2$ なので、散乱長は散乱の強さや大きさを表す指標です。それと同時に、波動関数の形状を表す量でもあります。実際、式 (6) より $k \to 0$ のときに

$$r\psi(r) \propto \begin{cases} \text{複雑な挙動} & (r \ll b) \\ \left(1 - \frac{r}{a}\right) & (b \ll r \ll k^{-1}) \end{cases} \tag{19}$$

[8] これは波動関数のノルムが正であることより導ける Wigner Bound と呼ばれる不等式 [25, 26]

$$r_{\rm eff} \le 2r - \frac{2r^2}{a} + \frac{2r^3}{3a^2} \tag{18}$$

から見て取れます (r は $r \ge b$ を満たす任意の正数)。

[9] 後述のように $r_{\rm eff} < 0$ になることもある。特に冷却原子では $r_{\rm eff}$ は原子種やその内部状態によって、正負の様々な値をとりうる。

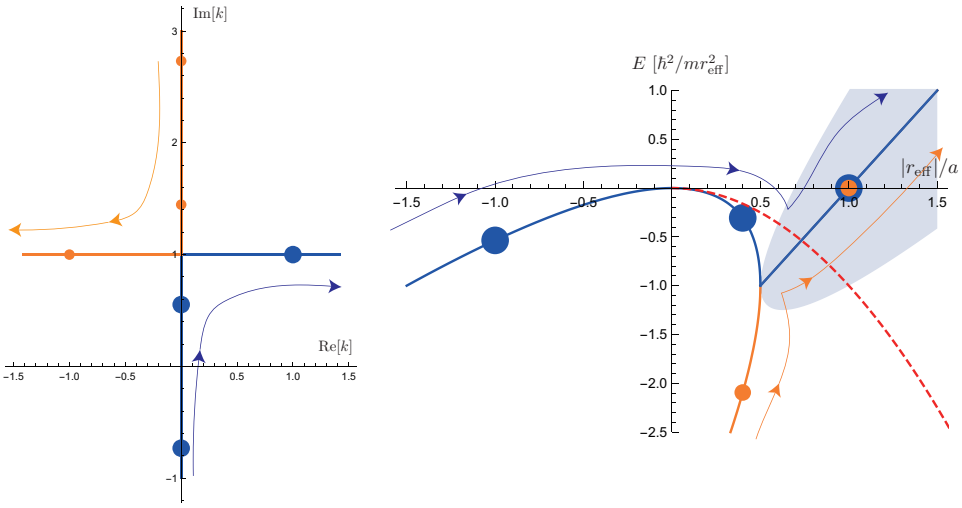


図 1: $r_{\rm eff} > 0$ での複素 k 平面での極の位置 (左) とエネルギー（右)。細い手書き矢印線で、$1/a$ を負から正に増やしていった際の動きを示している。$|r_{\rm eff}|/a = -1.0, 0.4, 1.0$ の極とエネルギーを青丸および橙丸で示す。薄青領域は状態の寿命を示している。橙色点線は普遍的な束縛エネルギー表式 (17)。

になります。このことより、散乱長は波動関数の「傾き」と「ゼロ点の位置」を特徴づける量だとも言えます。さらに、式 (12) より $ka \sim -\delta_0(k)$ なので $V(r)$ による位相シフトの大きさを特徴づける量でもあります。このように、散乱長にはいくつかの理解の仕方がありますが、これらは互いに等価です。

通常、散乱断面積は $V(r)$ の到達距離の 2 乗程度（$\sigma \sim b^2$）なので、$\sigma = 4\pi a^2$ より散乱長の大きさは相互作用の到達距離程度 $|a| \sim b$ です。しかし、束縛状態が現れるところで $|a| \gg b$ と非常に大きくなります。実際、引力ポテンシャルを深くしていくと散乱長は負に大きくなり、$1/a = 0$ をまたいで $a = -\infty$ から $a = +\infty$ へと変化します。このとき、波動関数の節がちょうど 1 つ増えます。「$E = 0$ での波動関数の節の数は、束縛状態の数と一致する」という Levinson の定理があるので [18]、この散乱長の発散と束縛状態の出現は一対一に対応しています。

これらのことを理解する具体例として、引力型の箱型ポテンシャルを考えます。このとき散乱長と有効レンジは

$$a = R\left(1 - \frac{\tan\gamma}{\gamma}\right), \quad r_{\rm eff} = R\left[1 + \frac{3\tan\gamma - \gamma(3+\gamma^2)}{3\gamma(\gamma - \tan\gamma)^2}\right] \quad (\gamma = R\sqrt{m|V_0|}) \tag{20}$$

と解析的に求まり、これを図 3 に示します。束縛状態が現れる $\gamma = \pi(n + 1/2)$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ で、散乱長が $a \to \pm\infty$ と発散します。$\gamma = \pi/2$ 近くの振る舞いを詳細に見てみましょう。γ を徐々に増やすと a が負に大きくなり、$\gamma = \pi/2$ で散乱長が発散する（$1/a = 0$）と同時に束縛状態が現れます。束縛状態がある $\gamma > \pi/2$ では、散乱長が正の大きな値から小さくなっていきます。すなわち $1/a$ は、負の値から 0 を経て正の値に変化していきます。これは、前節で見た「$a < 0$ では束縛状態がなく、$a > 0$ では式 (17) のような束縛状態が現れる」という結果と整合しています。また、図 3 に示す通り、式 (17) や式 (16) で得られる束縛エネルギーは、束縛エネルギーが小さい領域でのみ箱型ポテンシャルの厳密解と良く一致します。すなわち、前節で得られた 2 体問題のユニバーサルな性質は、低エネルギーで散乱長が大きな領域で成立するものなのです。

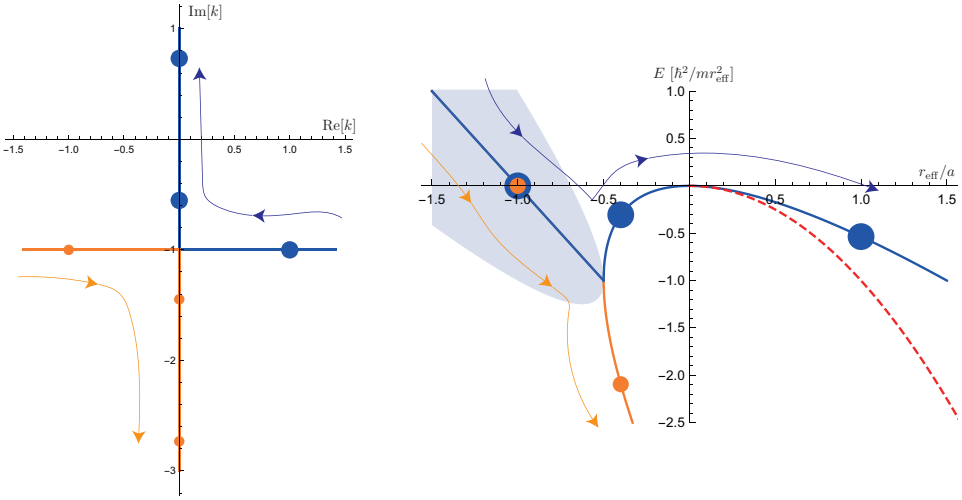


図 2: $r_{\rm eff} < 0$ での複素 k 平面での極の位置 (左) とエネルギー（右）。$|r_{\rm eff}|/a = -1.0, -0.4, 1.0$ の極とエネルギーを青丸および橙丸で示す。

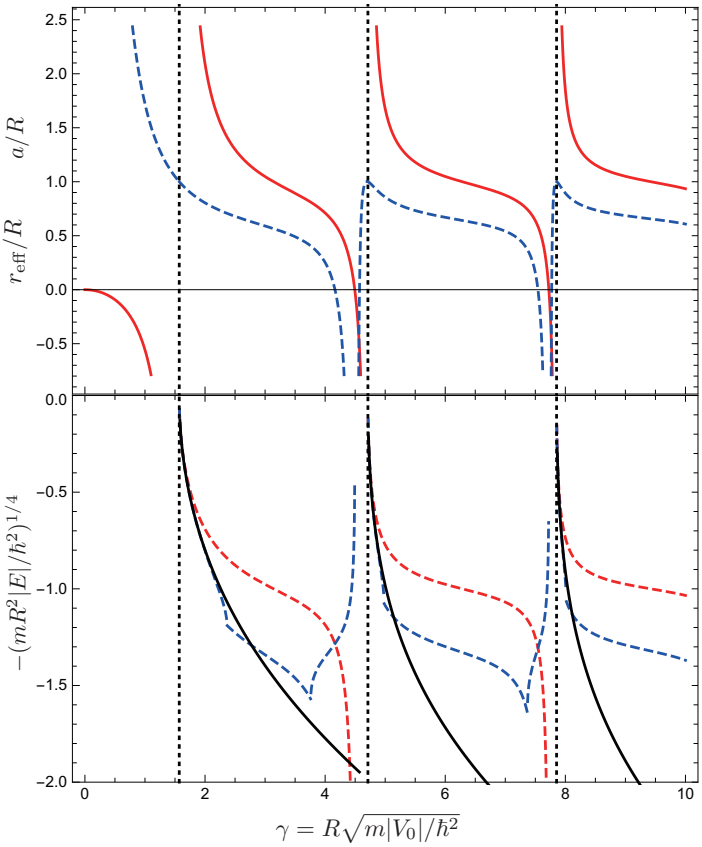


図 3: 上パネル：引力箱型ポテンシャルの散乱長 (赤実線) と有効レンジ（青破線)。下パネル：束縛状態のエネルギー (黒実線)。束縛エネルギーが小さい領域では、厳密解が低エネルギーのユニバーサルな表式 (17)[赤破線] および式 (16)[青破線] と良く一致している。束縛状態のエネルギーがゼロになる $\gamma = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2$(黒垂直点線) で散乱長が発散する。

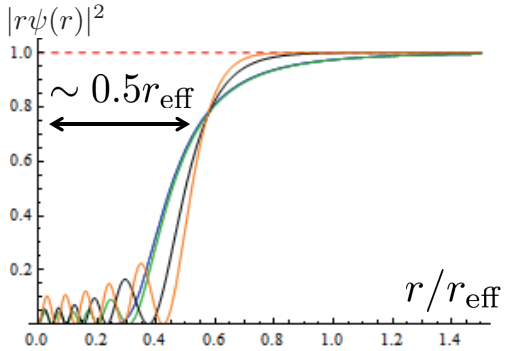


図 4: $1/a = 0$ における、短距離型ポテンシャルに対するゼロエネルギー波動関数$\chi_0(r) = r\psi(r)|_{E=0}$(実線) と、漸近波動関数 $1 - r/a = 1$(赤破線) の比較。横軸は各ポテンシャルの $r_{\rm eff}$ を単位として測っている。Lennard-Jones ポテンシャル (青)、ソフトコア van der Waals ポテンシャル $-C/(r^6 + \sigma^6)$ (緑)、Pöschl-Teller ポテンシャル $-C/\cosh^2(r/r_0)$(黒)、ガウスポテンシャル $-Ce^{-r^2/r_G^2}$(橙)。

一方、有効レンジは $\gamma = \pi(n + 1/2)$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ 近傍では $r_{\rm eff} = R$ で、ポテンシャルの幅と同じ値です。これは以下の Smorodinsky 公式 (教科書 [18] などを参照) から理解できます：

$$\frac{r_{\rm eff}}{2} = \int_0^\infty dr \left[\left(1 - \frac{r}{a}\right)^2 - \chi_0^2(r) \right] \tag{21}$$

$\chi_0(r)$ はゼロエネルギーでの波動関数 $r\psi(r)$ を $r \gg b$ で $1 - \frac{r}{a}$ に漸近するように規格化したものです。これより $r_{\rm eff}$ は、ポテンシャルによって式 (19) の一行目のように波動関数が複雑な挙動をする長さスケール、すなわちポテンシャルのレンジをおおよそ与えることになります: $r_{\rm eff} \sim b$。図 4 に、いくつかの短距離型ポテンシャルのゼロエネルギー波動関数 $\chi_0(r) = r\psi(r)|_{E=0}$ と漸近波動関数の比較を示します。実際に、これらのポテンシャルに対して $r_{\rm eff}$ がポテンシャルの到達距離 (i.e. 波動関数が漸近形からずれる長さスケール) を与えることが見て取れます。

ただし、常にそうなるとは限りません。図 5 のようなデルタ関数障壁つきのポテンシャルを考えると、散乱長と有効レンジは [27]

$$a = R - \frac{1}{g + \kappa_0 \cot(\kappa_0 R)} \tag{22}$$

$$r_{\rm eff} = R - \frac{g(1 + gR)}{\kappa_0^2} \tag{23}$$

のようになります。障壁の高さ g を大きくしていくと、有効レンジは負で、その大きさはポテンシャルの到達距離よりもはるかに大きくなり得ます[10]。しかし、この講義録ではこのような場合は考えず、主に $r_{\rm eff} \sim R$ の場合を扱います。

量子少数系のユニバーサリティの本質的な起源　多体系の相転移・臨界現象と比較すると、その起源が見えてきます。相転移・臨界現象では臨界点を境に系の挙動が変化し、その近傍で相関長

[10] このような有効レンジが負で大きな値を持つケースが冷却原子でもあり、Narrow Feshbach 共鳴などと呼ばれています。ただしこれまで冷却原子の実験で良く用いられている Feshbach 共鳴は、比較的 $r_{\rm eff}$ がポテンシャルの到達距離と良く一致するいわゆる Broad Feshbach 共鳴であることが多く、Narrow Feshbach 共鳴近傍の少数系の物理については、現在研究が進んでいるところで、未解明なことも多いです。

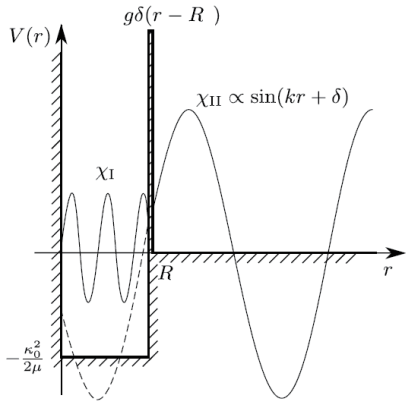


図 5: デルタ関数障壁つきのポテンシャル (モデルと図は [27] より引用)。

と呼ばれる長さスケールが発散します。そのような発散的に大きな長さスケールが存在するために、系を繰り込み群の手法や低エネルギー有効理論などで粗視化でき、相転移・臨界現象のユニバーサリティが導けます。一方、少数系では 2 体束縛状態が現れる臨界点であるユニタリー極限付近で、散乱長 a が発散します。そのような発散的に大きな長さスケールが存在するため、同様に系を粗視化する繰り込み群の手法や低エネルギー有効理論が使え、少数系についてもユニバーサリティが導けます。これが、本講義の主題である「量子少数系のユニバーサリティ」が成り立つ理由のエッセンスです。上記の箱型ポテンシャルの例で散乱長があまり大きくない領域 (束縛状態のエネルギーが大きな領域) でユニバーサルな結果と大きくずれたのも、相転移・臨界現象が臨界点 $T = T_c$ から離れるにつれてユニバーサリティの予言からずれていくことと類似しています。

散乱長が大きな系は非常に稀　しかし散乱長が非常に大きいという条件 ($|a| \gg b$) は、自然界ではめったに満たされません。これは相互作用による位相シフト $\delta(k)$ が 0 から π の間でランダムに選ばれていると考えると、散乱長が発散的に大きくなる $\pi/2$ 付近になるのが稀だということが理解できます。そのように稀な具体例のいくつかを Sec. 2.6 や Sec. 5 で紹介します。

2.4　擬ポテンシャル (Pseudo potential) の方法

2.4.1　実空間での解析に適した方法

式 (19) より、もし興味のある物理現象が低エネルギーで、その空間スケールがポテンシャルの到達距離よりも遥かに大きい場合 (i.e. $k^{-1} \gg R, b, |r_{\rm eff}|$)、短距離での複雑な振る舞いは無視して、$r \gtrsim R, b, |r_{\rm eff}|$ での波動関数だけを見ればよいことになります。その場合、波動関数は $r > 0$ でポテンシャルの無い自由な方程式

$$-\frac{1}{2\mu_{12}}\nabla_{\boldsymbol{r}}^2\psi(r) = E\psi(r), \tag{24}$$

に従います。そこで、$r = 0$ 付近で散乱長を再現する位相シフトを与える境界条件

$$r\psi(r) \to \mathrm{Const}\left(1 - \frac{r}{a}\right) \quad (r \to 0) \tag{25}$$

を課した解を考えれば、2 体問題の解を非常に良く再現できると予想できます。このようなアプローチは**ゼロレンジ理論 (zero-range theory)** と呼ばれ、$R, b, |r_{\rm eff}|$ などがゼロと見なせるくらい、相対的に小さい場合に非常に良く成立します。境界条件式 (25) は

$$\frac{d}{dr}\log[r\psi(r)]_{r=0} = -\frac{1}{a} \tag{26}$$

とも書き換えられます。ここで対数微分を使うのは、式 (25) の未定係数によらない形で境界条件を表すためです。この境界条件は **Bethe-Peierls 境界条件**と呼ばれ、最も良く使われるゼロレンジ理論の 1 つです。

この Bethe-Peierls 境界条件の下で 2 体問題を解くことは、散乱振幅を式 (15) と見なすことと等価です。そのことを示しましょう。$r > 0$ では自由場なので、漸近波動関数 $r\psi(r) = \sin(kr + \delta_0(k))$ が $r = 0$ の無限近傍まで厳密解になっています。そして $r = 0$ で Bethe-Peierls 境界条件を課すと

$$k\cot\delta_0(k) = -\frac{1}{a} \tag{27}$$

となります。これを式 (5) に代入すると式 (15) が求まります。上式から分かる通り、この Bethe-Peierls 境界条件の方法は $r_{\rm eff} = 0$ と近似することに相当しています。それがゼロレンジ近似と呼ばれる理由です[11]。

上記の Bethe-Peierls 境界条件の方法は、ある意味で、$r = 0$ にのみポテンシャルが存在して位相シフト $\delta_0 = -ka$ を与えているとみなせます。実際、これは

$$V_{\rm HY}(r) = \frac{2\pi a}{\mu_{12}}\delta^{(3)}(\boldsymbol{r})\frac{\partial}{\partial r}r \tag{29}$$

という **Huang-Yang の擬ポテンシャル (pseudo potential)** が存在するのと等価です。それを示しましょう：$r\psi(r) = \sin(kr + \delta_0(k))$ に対して

$$\nabla_{\boldsymbol{r}}^2\psi(r) = -k^2\psi(\boldsymbol{r}) - 4\pi\delta^{(3)}(\boldsymbol{r})\sin\delta_0(k) \tag{30}$$

であり、

$$V_{\rm HY}(r)\psi(r) = \frac{2\pi a}{\mu_{12}}\delta^{(3)}(\boldsymbol{r})\frac{\partial}{\partial r}\sin(kr + \delta_0(k)) = \frac{2\pi a}{\mu_{12}}\delta^{(3)}(\boldsymbol{r})k\cos\delta_0(k) \tag{31}$$

であることから、有効レンジ展開式 (27) を使うと

$$\left[-\frac{1}{2\mu_{12}}\nabla_{\boldsymbol{r}}^2 + V_{\rm HY}(r)\right]\psi(r) = \frac{k^2}{2\mu_{12}}\psi(r), \tag{32}$$

を満たし、2 つの方法が等価なことが分かります。Huang-Yang の擬ポテンシャルの微分演算子 $\frac{\partial}{\partial r}r$ は一見わかりにくいのですが、上記の計算から、単純なデルタ関数だけでは $r = 0$ 付近で $V(r)\psi(r) \sim \delta^{(3)}(\boldsymbol{r})/r = \delta^{(3)}(\boldsymbol{r}) \times \infty$ という発散が生じてしまうことが分かります。つまりこの微分演算子は、発散が起こらないように上手く正則化 (regulate) する役割を果たしているのです。

---

[11] Bethe-Peierls 境界条件を

$$\frac{d}{dr}\log[r\psi(r)]_{r=0} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2}r_{\rm eff}k^2 \tag{28}$$

とエネルギー依存型境界条件にすることで、Bethe-Peierls の方法を有効レンジの効果を含むように拡張する試みもありますが、こちらは本講義では割愛します。詳細は [28] などを参照。

2.4.2 運動量空間での解析に適した方法

運動量空間で2体、3体Schrödinger方程式を解きたい場合、Bethe-Peierls境界条件やHuang-Yangの擬ポテンシャルの方法よりも、以下の分離型ポテンシャル [29] を用いる方が便利です。

$$\hat{V}_{\rm sep} = g|\phi\rangle\langle\phi| \tag{33}$$

通常よく用いられるポテンシャル $V(\boldsymbol{r}) = \langle \boldsymbol{r}|V|\boldsymbol{r}'\rangle = \langle \boldsymbol{r}|V|\boldsymbol{r}\rangle$ が空間について対角的 (diagonal) なのに対して、

$$\langle \boldsymbol{r}|\hat{V}_{\rm sep}|\boldsymbol{r}'\rangle = g\langle \boldsymbol{r}|\phi\rangle\langle\phi|\boldsymbol{r}'\rangle = g\phi(\boldsymbol{r})\phi^*(\boldsymbol{r}') \tag{34}$$

と non-diagonal な形をしています。少し不思議なポテンシャルではありますが、運動量空間での表現が

$$\langle \boldsymbol{k}|\hat{V}_{\rm sep}|\boldsymbol{k}'\rangle = g\langle \boldsymbol{k}|\phi\rangle\langle\phi|\boldsymbol{k}'\rangle = g\phi(\boldsymbol{k})\phi^*(\boldsymbol{k}') \tag{35}$$

と簡単な形になるため、2体問題が形式的に非常に簡単に解けるという長所があります。以下でそのことを見ていきましょう。Schrödinger方程式

$$\left[-\frac{1}{2\mu_{12}}\nabla_{\boldsymbol{r}}^2 + g|\phi\rangle\langle\phi|\right]|\psi\rangle = E|\psi\rangle \tag{36}$$

に対して左から $\langle \boldsymbol{p}|$ を作用させると

$$\langle \boldsymbol{p}|\psi\rangle = \psi(\boldsymbol{p}) = \frac{g\langle\phi|\psi\rangle}{E - p^2/2\mu_{12} + i0}\phi(\boldsymbol{p}) \tag{37}$$

となります。いま散乱問題を考えているので、in-coming momentum を $\boldsymbol{k}$ ($E = k^2/2\mu_{12}$) として、波動関数を入射波と散乱波に分けて

$$\psi(\boldsymbol{p}) = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{k}) + \psi_{\rm sc}(\boldsymbol{p}) \tag{38}$$

と書けます。これと式 (37) により

$$\psi_{\rm sc}(\boldsymbol{p}) = \frac{g\phi(\boldsymbol{p})}{E - p^2/2\mu_{12} + i0}\left[\phi^*(\boldsymbol{k}) + \langle\phi|\psi_{\rm sc}\rangle\right] \tag{39}$$

となります。右辺にこの $\psi_{\rm sc}$ を逐次代入することを繰り返すと

$$\psi_{\rm sc}(\boldsymbol{p}) = \frac{T(\boldsymbol{k},\boldsymbol{p})}{k^2 - p^2 + i0} \tag{40}$$

が得られます。ここで

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{k},\boldsymbol{p}) &= 2\mu_{12}g\phi^*(\boldsymbol{k})\phi(\boldsymbol{p})\left[1 + \sum_{\boldsymbol{q}}\frac{g|\phi(\boldsymbol{q})|^2}{E - q^2/2\mu_{12} + i0} + \cdots\right] \\ &= \frac{2\mu_{12}g\phi^*(\boldsymbol{k})\phi(\boldsymbol{p})}{1 - \sum_{\boldsymbol{q}}\frac{g|\phi(\boldsymbol{q})|^2}{E - q^2/2\mu_{12} + i0}} \\ &= \frac{\phi^*(\boldsymbol{k})\phi(\boldsymbol{p})}{\frac{1}{2\mu_{12}g} - \sum_{\boldsymbol{q}}\frac{|\phi(\boldsymbol{q})|^2}{k^2 - q^2 + i0}} \end{aligned} \tag{41}$$

は 2 体 T 行列と呼ばれます。散乱振幅と T 行列は直接関係づけられます[12]：

$$f(k) = -\frac{1}{4\pi} T(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{p})|_{|\boldsymbol{k}|=|\boldsymbol{p}|} \tag{42}$$

低エネルギー極限での散乱振幅式 (15) と比較すると、

$$\frac{1}{4\pi a} = |\phi(0)|^{-2} \left[\frac{1}{2\mu_{12} g} + \sum_{\boldsymbol{q}} \frac{|\phi(\boldsymbol{q})|^2}{q^2} \right] \tag{43}$$

という、散乱長と g を関係づける式が求まります。これは繰り込み関係式と呼ばれることもあります。その理由は、g という裸の (bare) 相互作用を物理的な相互作用の強さ a と結び付け、相互作用を繰り込んでいる式であるためです。最も単純な

$$\phi(\boldsymbol{k}) = \begin{cases} 1 & (|\boldsymbol{k}| < \Lambda) \\ 0 & (|\boldsymbol{k}| > \Lambda) \end{cases} \tag{44}$$

というステップ関数型の分離型ポテンシャルを考えると、

$$\frac{1}{2\pi a} = \left[\frac{1}{\mu_{12} g} + \frac{\Lambda}{\pi^2} \right] \tag{45}$$

となり、$\Lambda \to \infty$ で $g \to 0$ となることから、Λ に対して $g(\Lambda)$ が繰り込まれていく様子が見て取れます[13]。このステップ関数型の分離型ポテンシャルは、$\Lambda \to \infty$ 極限で、Bethe-Peierls 境界条件や Huang-Yang の擬ポテンシャルの方法と等価になります。それを示しましょう。T 行列は式 (41) より

$$\begin{aligned} T^{-1}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{p}) &= \frac{1}{4\pi a} - \sum_{|\boldsymbol{q}|<\Lambda} \left[\frac{1}{q^2} + \frac{1}{k^2 - q^2 + i0} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi a} - \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\Lambda q^2 dq \left[\frac{1}{q^2} + \frac{\mathcal{P}}{k^2 - q^2} - i\pi\delta(k^2 - q^2) \right] \\ &\to \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{a} + ik \right] \end{aligned} \tag{46}$$

となります。ここで $\mathcal{P}$ は主値積分で、最後の行では第二項に対して

$$\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\Lambda q^2 dq \left[\frac{1}{q^2} + \frac{\mathcal{P}}{k^2 - q^2} \right] = \frac{k^2}{2\pi^2} \int_0^\Lambda dq \frac{\mathcal{P}}{k^2 - q^2} = \frac{k}{2\pi^2} \mathrm{arctanh} \frac{k}{\Lambda} \to 0 \tag{47}$$

を用いました。これより、式 (42) を用いると散乱振幅は式 (15) となり、Bethe-Peierls 境界条件や Huang-Yang の擬ポテンシャルの方法と等価なことが示されました。このことは、この分離型ポテンシャルが

$$\phi(\boldsymbol{r}) = 0 \quad (|\boldsymbol{r}| \gg \Lambda^{-1})$$

$$\phi(\boldsymbol{r}) \sim \phi(0) \quad (|\boldsymbol{r}| \lesssim \Lambda^{-1})$$

を満たすことから、$\Lambda \to \infty$ 極限で

$$\langle \boldsymbol{r}|\hat{V}_{\mathrm{sep}}|\boldsymbol{r}'\rangle = g\phi(\boldsymbol{r})\phi^*(\boldsymbol{r}') \to \tilde{g}\delta^{(3)}(\boldsymbol{r})\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}') = \tilde{g}\delta^{(3)}(\boldsymbol{r})\delta^{(3)}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \quad (\tilde{g} = g|\phi(0)|^2) \tag{48}$$

となり、実空間でデルタ関数相互作用を考えていることと等価になる、ということからも理解できます。

[12] これは式 (40) を複素積分を用いながら Fourier 変換し、式 (3) と比較することで導けます。

[13] 式 (45) を Λ で微分すれば繰り込み群方程式が得られ、$\Lambda = -\frac{\pi^2}{\mu_{12} g}$ という fixed point とそのまわりのフローが得られます。

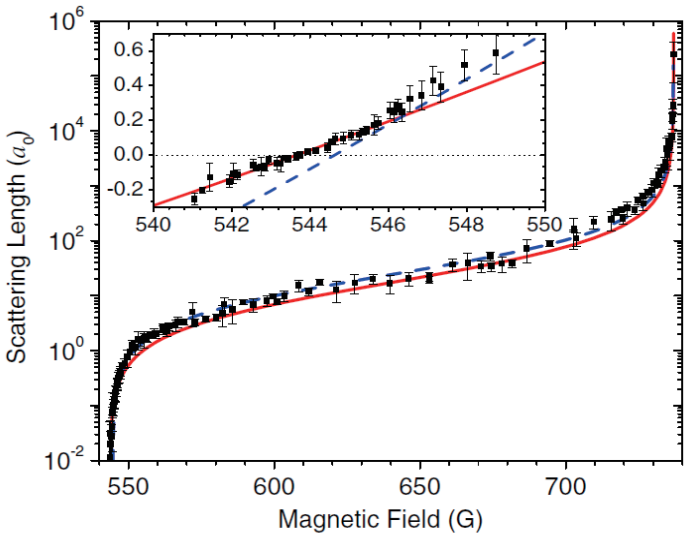


図 6: ^{7}Li 原子での Feshbach 共鳴の観測 [35]。$a_0 = 0.52... \times 10^{-10}$ m は原子単位。赤線と青線は、それぞれ結合チャンネル法による Feshbach 共鳴の理論計算と式 (49)。Inset は散乱長のゼロ点付近の挙動 $a \approx 0$。$B_0 = 737$ G。図は [35] より引用。

2.5　冷却原子における Feshbach 共鳴による散乱長の制御[14]

冷却原子気体の長所は、様々なパラメータを人工的に自在に制御できることです。特に、Feshbach 共鳴 [30] という技術により、原子間相互作用を変化させることができます。図 6 に Feshbach 共鳴の観測例を示します[15]。原子間の s 波散乱長が、外部磁場を変えることで変化していることが見て取れます。特に、共鳴磁場と呼ばれる B_0 付近で散乱長は

$$a(B) \propto \left(1 - \frac{\Delta B}{B - B_0}\right), \tag{49}$$

のように振る舞い、発散的に大きくなります。この技術を使えば、散乱長を制御しつつ、少数系や多体系の研究を理論と比較しながら行うことができます。特に散乱長が発散的に大きくなる系での少数系・多体系のユニバーサルな挙動を調べることができ、Efimov 状態の研究や、ユニタリーフェルミ気体を用いた中性子核物質の状態方程式の研究 [32, 33, 34] などが行われています。

Feshbach 共鳴の物理的な起源はチャンネル結合散乱にあります。詳細は解説記事 [36] やレビュー論文 [37] などに詳しく書かれています。ここでは簡単にエッセンスのみを紹介します：原子には多数の内部状態があり、異なるチャンネルの束縛状態がちょうど入射エネルギーと一致した際に、散乱長が発散的に増大します。ΔB が非常に大きな、いわゆる Broad Feshbach 共鳴の場合には、この束縛状態のチャンネルの自由度は無視でき、前節で紹介したゼロレンジ理論や擬ポテンシャルの方法が使えます。従って Feshbach 共鳴近傍の散乱現象の挙動は上で述べた通りになります。一方、ΔB が比較的小さな、いわゆる Narrow Feshbach 共鳴の場合には、束縛状態の自由度も

[14] Feshbach はドイツ人ではなくアメリカ人で、正しくは「フェッシュバック」と発音します。ただし、国内・海外ともに「フェッシュバッハ」と発音されることも多いです。また、類似の Fano 共鳴と呼ばれる現象を原子分子物理学の分野で発見した Fano と併せて、「Fano-Feshbach 共鳴」と呼ばれることもあります。

[15] ^{7}Li 原子については、その後の研究で散乱長と磁場の関係が更新されており [31]、この図は少し古い観測データです。

しっかり取り込む必要があり、結合チャンネルを陽に含むような相互作用モデル [38, 39] が必要になってきます。この講義録では前者の場合をゼロレンジ理論や擬ポテンシャルの方法を使って解説します。後者の場合の Efimov 状態の物理は、まだ完全には解明されておらず、重要なテーマの 1 つになっています [40, 41]。

Note: 「冷却原子の Feshbach 共鳴」は本来の「Feshbach 共鳴」と少し違い、「共鳴」ではない。

Feshbach「共鳴」と呼ばれるので、「おや？共鳴状態がどこかに出てくるのかな？」と思うかもしれませんが、違います。冷却原子の分野では、ある磁場の周りで散乱長や散乱断面積が非常に大きくなる現象を（やや短絡的に）「共鳴」と呼んでしまっており、特に実験的に重要な Broad Feshbach 共鳴 ($r_{\rm eff} > 0$) の場合には共鳴状態は現れません (図 1 参照)。一方、散乱理論における「共鳴」とは、$\mathrm{Re}[E] > 0$ で寿命の長い準安定状態が現れることを指し、S 行列の極が複素 k 平面の第四象限の実軸近く（$\mathrm{Re}[k] \gg |\mathrm{Im}[k]|$）に現れることに対応します。本来 Feshbach が発見した現象では、この意味での「共鳴状態」がちゃんと出現します。その意味において、「冷却原子の Feshbach 共鳴は本来の Feshbach 共鳴とは少し違う。結合チャンネル Hamiltonian の系のパラメータを連続的に変化させた際に、束縛状態がバーチャル状態に変化していき、その際に散乱長が非常に大きくなる現象であり、共鳴状態が本質ではない」と言うこともできると思います。

2.6 物理系への適用例

重陽子 陽子・中性子間の相互作用は、古くは湯川秀樹の研究をはじめとして様々に研究され、かなりのことが分かっています。遠方では π 中間子の交換による引力相互作用

$$V(r) \to -\frac{e^{-\kappa_\pi r}}{r} \tag{50}$$

が働き、その到達距離は π 中間子の質量 140 MeV から $\kappa_\pi^{-1} \sim 1-2$ fm と見積もれます。一方、近距離では、核子同士が重なることによるクォークの排他律などから強い斥力が現れます。この遠距離・近距離の挙動を再現するモデルとして、CD Bonn[42], Reid 93[43], AV18[44] などのポテンシャルがあります。これらは、どれも格子 QCD 計算により得られた核子間ポテンシャル [45, 46] とも定性的に同じような形状をしています。

中性子・陽子間の s 波散乱長は観測データなどから、スピンが平行なトリプレット状態の場合は $a_t = 5.4112(15)$ fm, スピンが反平行なシングレット状態の場合は $a_s = -23.7148(43)$ fm と見積もられています [47]。これらは上記の核力の到達距離の 5-20 倍程度とだいぶ大きいので、比較的ユニバーサルに振る舞うのでは、と期待されます。実際に、この散乱長の値を式 (17) に代入すると、全スピン角運動量 $S = 1$ の重陽子の束縛エネルギーは 1.416 MeV になります。これは実際の重陽子の束縛エネルギー 2.224 MeV とオーダーとしては合っていますが、値はだいぶずれています。これは、中性子・陽子間の散乱長が極端に大きいわけではないため、有効レンジなどの効果が無視できないからです。有効レンジの効果を取り込んだ式 (16) に、中性子・陽子間の有効レンジ $r_{{\rm eff},t} = 1.7436(19)$ fm[47] を代入すると、重陽子の束縛エネルギーは 2.223 MeV となり、実際の値とほぼ完全に一致します。これらの結果から、低エネルギーでの中性子・陽子散乱では、ゼロレンジ近似で定性的には良く、有効レンジの効果を取り込めば定量的に中性子・陽子散乱を記述できる、ということになります。また $a_s < 0$ であるため、$S = 0$ の重陽子状態や中性子 2 つの束縛状態は存在しません。これらの結果は Sec. 5 で三重水素の計算を行うときにも使います。

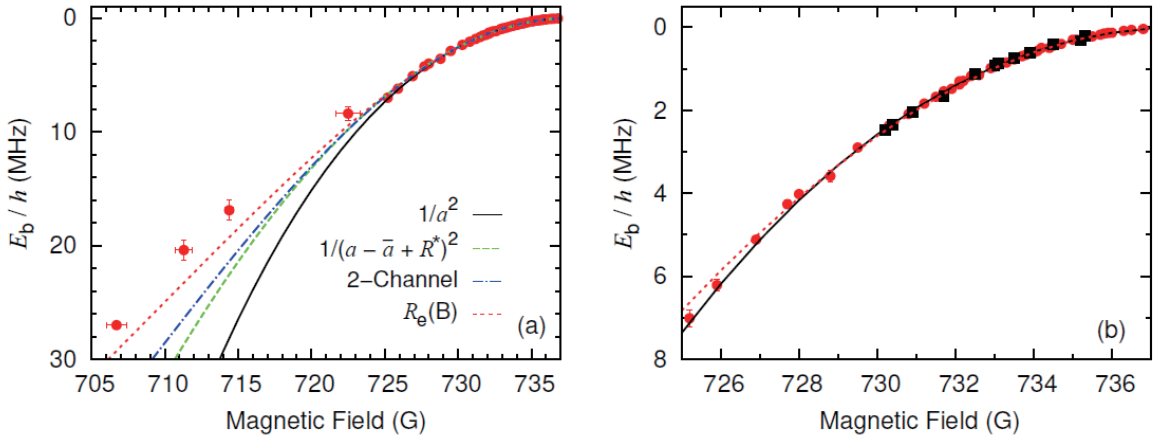


図 7: ^{7}Li 原子での Feshbach 共鳴近傍の束縛エネルギー ([31] より引用)。振動磁場を外場として与えた時の原子ロス (modulation spectroscopy) により測定。赤点と青点は、それぞれ低温 (BEC 状態) と高温 (熱原子 ~ 3 μK) での観測データ。式 (17) による理論 (黒線)、それに有効レンジ補正を入れた表式 (緑破線)、結合チャンネル計算 (青点破線)、式 (16) による理論に有効レンジの磁場依存性を取り込んだもの（赤点線）も示す。

^{4}He 原子　^{4}He 原子には 2 体束縛状態が 1 つ存在し、その束縛エネルギーは物質波回折による実験で 1.1(2) mK [48]、最近の Coulomb explosion と呼ばれる手法で 1.76(15) mK [49] と測定されています。一方、^{4}He 原子間のポテンシャルとして良く知られている LM2M2 ポテンシャルによる 2 体問題の計算によると、束縛エネルギーは 1.308 mK であり、比較的良く一致しています。散乱長は a = 100.01 Å であり、相互作用レンジの 10-20 倍の非常に大きな散乱長を持ちます[16]。この散乱長と式 (17) を用いて束縛エネルギーを計算すると 1.21 mK になり、精密な計算結果と非常に良く合います。従って、^{4}He 原子の系はゼロレンジ近似が非常に良く成立する系だと期待できます。

Feshbach 共鳴近傍の冷却原子　Feshbach 共鳴で散乱長を非常に大きくした系では、式 (17) や式 (16) が非常に良く成立します。図 7 に束縛状態の束縛エネルギーの観測例を示します。散乱長が大きく束縛エネルギーが小さい領域で、式 (17)(黒線) が非常に良く成立している様子が見て取れます。また共鳴点からだいぶ外れた際にも、有効レンジ補正を取り入れた式 (16)(赤点線) が非常に良く束縛エネルギーを再現する様子が分かります。

3　3 体問題の理論的手法

この節では、3 体問題の理論的な扱い方と解き方を紹介します。一般のポテンシャルに対して量子 3 体問題を解くには数値計算が不可欠ですが、ゼロレンジ近似の下では 3 体問題をほぼ解析

[16]最近 QED 補正まで取り入れたポテンシャルも提案されており [50]、それによると束縛エネルギーは 1.62 ± 0.03 mK になります。これは LM2M2 ポテンシャルや TTY ポテンシャル [51] よりも、Coulomb explosion の実験と良く一致します。

的に解くことができます。以下では、実空間の方法と運動量空間の方法の両方を解説します。簡単のため、内部自由度 (スピン、アイソスピン) を持たない 3 つの同種ボース粒子の 3 体問題を考えます (異種粒子混合系の 3 体問題については、Sec. 4 で解説します)。

3.1 実空間の方法：Hyper-spherical 座標の方法

一般理論 まず、一般的な相互作用を含む Schrödinger 方程式を考えます：

$$\left[-\frac{1}{2m}(\nabla^2_{\boldsymbol{r}_1}+\nabla^2_{\boldsymbol{r}_2}+\nabla^2_{\boldsymbol{r}_3})+U(\boldsymbol{r_1},\boldsymbol{r_2},\boldsymbol{r_3})\right]\Psi(\boldsymbol{r_1},\boldsymbol{r_2},\boldsymbol{r_3})=E\Psi(\boldsymbol{r_1},\boldsymbol{r_2},\boldsymbol{r_3}). \tag{51}$$

3 体問題を扱うには、以下の Jacobi 座標 $(\boldsymbol{r}_{ij},\boldsymbol{\rho}_k)$ が便利です：

$$\boldsymbol{R}_{\mathbf{tot}} = \frac{1}{3}(\boldsymbol{r_1}+\boldsymbol{r_2}+\boldsymbol{r_3}), \tag{52}$$

$$\boldsymbol{r_{12}} = \boldsymbol{r_1}-\boldsymbol{r_2}, \tag{53}$$

$$\boldsymbol{\rho_3} = \boldsymbol{r_3}-\frac{1}{2}(\boldsymbol{r_1}+\boldsymbol{r_2}). \tag{54}$$

実際、Jacobi 座標を使うと、運動項は

$$-\sum_{i=1}^{3}\frac{\nabla^2_i}{2m}=-\frac{\nabla^2_{\boldsymbol{R}_{\mathbf{tot}}}}{6m}-\frac{\nabla^2_{\boldsymbol{r_{12}}}}{m}-\frac{3\nabla^2_{\boldsymbol{\rho_3}}}{4m} \tag{55}$$

のように各座標の項にきれいに分かれます。Jacobi 座標 $(\boldsymbol{r}_{ij},\boldsymbol{\rho}_k)$ は、2 体問題での「相対座標」を 3 粒子系に拡張したもので、$\boldsymbol{r}_{ij}$ は i,j 粒子間の相対座標、$\boldsymbol{\rho}_k$ は i,j 粒子の重心と k 粒子の間の相対座標です。式 (55) は帰納的に簡単に示せます：2 体問題では、1・2 粒子の重心座標 $\boldsymbol{R}_{tot,12}$、相対座標 $\boldsymbol{r}_{12}$、全質量 $M_{12}=m_1+m_2$、換算質量 $\mu_{12}=m_1m_2/(m_1+m_2)$ を使って、運動項が

$$-\frac{1}{2m_1}\nabla^2_{\boldsymbol{r}_1}-\frac{1}{2m_2}\nabla^2_{\boldsymbol{r}_2}=-\frac{1}{2M_{12}}\nabla^2_{\boldsymbol{R}_{tot,12}}-\frac{1}{2\mu_{12}}\nabla^2_{\boldsymbol{r}_{12}} \tag{56}$$

と表されることを思い出すと

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\frac{\nabla^2_i}{2m} &= \frac{1}{2\mu_{12}}\nabla^2_{\boldsymbol{r}_{12}}+\frac{1}{2M_{12}}\nabla^2_{\boldsymbol{R}_{tot,12}}+\frac{1}{2m}\nabla^2_{\boldsymbol{r}_3}\\ &= \frac{1}{2\mu_{12}}\nabla^2_{\boldsymbol{r}_{12}}+\frac{1}{2\mu_{12,3}}\nabla^2_{\boldsymbol{\rho}_3}+\frac{1}{2M_{tot,12,3}}\nabla^2_{\boldsymbol{R}_{\mathbf{tot}}}\end{aligned} \tag{57}$$

ここで、2 行目では $(\boldsymbol{R}_{tot,12},\boldsymbol{r}_3)$ とその質量 (M_{12},m) に対して式 (56) を適用しました。$M_{tot,12,3}=3m$, $M_{12}=2m,\mu_{12,3}=M_{12}m/(M_{12}+m)=2m/3$ を代入すると、式 (55) が示せます。

Jacobi 座標を使って、より便利な超球面座標 (Hyper-spherical coordinate) を導入できます[17]:

$$R^2\equiv\frac{2}{3}\left[r^2_{12}+r^2_{23}+r^2_{31}\right]=r^2_{12}+\frac{4}{3}\rho^2_3, \tag{58}$$

[17]Hyper-radius にはいくつかの異なる定義の流儀があるので要注意。ここでは Efimov や Skorniakov–Ter-Martirosian の原論文などに沿った定義をするが [52, 53, 54]、最近では $R\equiv\sqrt{\frac{r^2_{12}+r^2_{23}+r^2_{31}}{\sqrt{3}}}$ という定義や [55, 56, 57]、$R\equiv\sqrt{\frac{r^2_{12}+r^2_{23}+r^2_{31}}{3}}$ という定義をする論文 [12, 58, 59, 60] が多い。それぞれ、この講義録の定義とは $\frac{3^{1/4}}{\sqrt{2}}=0.931...$ 倍と $\frac{1}{\sqrt{2}}=0.707...$ 倍異なる。より一般的には、$R\equiv\sqrt{\frac{r^2_{12}+r^2_{23}+r^2_{31}}{3\tilde{m}}}$ と任意の無次元数 $\tilde{m}$ を導入して定義できる [13, 61]。

$$\alpha_3 = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}r_{12}}{2\rho_3}\right) \quad \left(0 \le \alpha_3 \le \frac{\pi}{2}\right). \tag{59}$$

ここで R は超半径 (hyper-radius)、α_k は超角度 (hyper-angle) と呼ばれます[18]。

Jacobi 座標は、hyper-radius と hyper-angle を使うと、

$$r_{12} = R\sin\alpha_3, \tag{60}$$

$$\rho_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}R\cos\alpha_3 \tag{61}$$

と逆に表せます。hyper-radius R は 3 粒子系の全体的なサイズを特徴づける量で、特に R が小さい時には 3 粒子がすべて接近します。一方、hyper-angle α_3 の方は、3 粒子の相対的な位置や形状を表します。図 8(a) に示す通り、$\alpha_3 \to +0$ のときに 1・2 粒子が接近して、3 体系は「細長い 2 等辺三角形」の形状になります。一方、$\alpha_3 \to \pi/2$ では、1・2 粒子の重心の位置に 3 粒子目が来て、3 体系は「直線状」になります (図 8(c))。また、$\alpha_3 = \pi/4$ のときには、3 体系は「正三角形」になります (図 8(b))。

相対運動部分の方程式

$$-\frac{1}{m}\left[\frac{1}{r_{12}}\frac{d^2}{dr_{12}^2}r_{12} - \frac{\hat{L}^2_{\boldsymbol{r_{12}}}}{r_{12}^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{\rho_3}\frac{d^2}{d\rho_3^2}\rho_3 - \frac{\hat{L}^2_{\boldsymbol{\rho_3}}}{\rho_3^2}\right) - mU(\boldsymbol{r_{12}},\boldsymbol{\rho_3})\right]\Psi(\boldsymbol{r_{12}},\boldsymbol{\rho_3}) = E\Psi(\boldsymbol{r_{12}},\boldsymbol{\rho_3}), \tag{62}$$

は、hyper-radius と hyper-angle を使い、微分の chain-rule などを用いると、以下のように書けます。

$$H\Psi(R,\alpha_3,\hat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{12}},\hat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{3}}) = E\Psi(R,\alpha_3,\hat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{12}},\hat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{3}}) \tag{63}$$

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{m}\left[\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{5}{R}\frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_3^2} + \frac{4}{R^2}\cot 2\alpha_3\frac{\partial}{\partial\alpha_3} - \frac{1}{R^2}\left(\frac{\hat{L}^2_{\boldsymbol{\rho_3}}}{\cos^2\alpha_3} + \frac{\hat{L}^2_{\boldsymbol{r_{12}}}}{\sin^2\alpha_3}\right) - mU(R,\alpha_3,\hat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{12}},\hat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{3}})\right] \\ &= -\frac{1}{m}\left[\frac{1}{R^{5/2}}\frac{\partial^2}{\partial R^2}R^{5/2} - \frac{15}{4R^2} + \frac{1}{R^2}\frac{1}{\sin 2\alpha_3}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha_3^2} + 4\right)\sin 2\alpha_3 - \frac{1}{R^2}\left(\frac{\hat{L}^2_{\boldsymbol{\rho_3}}}{\cos^2\alpha_3} + \frac{\hat{L}^2_{\boldsymbol{r_{12}}}}{\sin^2\alpha_3}\right) - mU(R,\alpha_3,\hat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{12}},\hat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{3}})\right] \end{aligned} \tag{64}$$

ここで $\hat{L}_{\boldsymbol{r_{12}}}$ と $\hat{L}_{\boldsymbol{\rho_3}}$ は $\boldsymbol{r_{12}}$ と $\boldsymbol{\rho_3}$ 座標の回転を記述する角運動量演算子です。

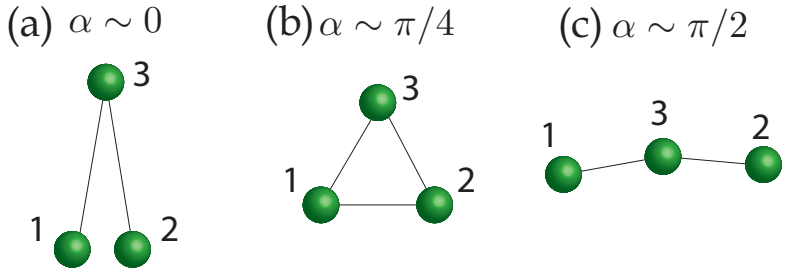


図 8: (a) 小さい hyper-angle、(b)$\alpha = \pi/4$、(c) 大きな hyper-angle における、3 体系の形状。

[18] これらの超半径・超角度という日本語での呼び方はかなりマイナーで、hyper-radius, hyper-angle という呼び方の方が主流なので、本講義録では hyper-radius, hyper-angle と呼びます。

自由粒子　最も簡単な自由粒子 $U = 0$ の場合を考えると、hyper-radius と hyper-angle は変数分離でき、

$$\Psi(\boldsymbol{r_{12}}, \boldsymbol{\rho_3}) = \frac{1}{R^{5/2}} f_n(R) \Phi_n(\alpha_3, \hat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{12}}, \hat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{3}}), \tag{65}$$

$$\frac{1}{m}\left[-\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\lambda_n + \frac{15}{4}}{R^2}\right] f_n(R) = E f_n(R) \tag{66}$$

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial \alpha_3^2} - 4\cot 2\alpha_3 \frac{\partial}{\partial \alpha_3} + \left(\frac{\hat{L}^2_{\boldsymbol{\rho_3}}}{\cos^2\alpha_3} + \frac{\hat{L}^2_{\boldsymbol{r_{12}}}}{\sin^2\alpha_3}\right)\right] \Phi_n(\alpha_3, \hat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{12}}, \hat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{3}}) = \lambda_n \Phi_n(\alpha_3, \hat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{12}}, \hat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{3}}) \tag{67}$$

となります。この分離された hyper-radius と hyper-angle の方程式は、2 体問題で動径座標と角度座標を変数分離した方程式に相当します。λ_n は超角度固有値 (hyper-angular eigenvalue) と呼ばれる量で、2 体系での回転運動の固有値 $\ell(\ell+1)$ に相当し、n は 2 体系での量子数 (ℓ, m) に相当します。2 体問題と 3 体問題の主な違いは、(i)α_3 という 3 体系の変形 (形状) を記述する座標があること、(ii) 回転の角運動量演算子が 2 つあり、相対運動の全角運動量 J は $\hat{L}_{\boldsymbol{r_{12}}}$ と $\hat{L}_{\boldsymbol{\rho_3}}$ の合成からなること、です。

Adiabatic hyper-spherical 展開　粒子間に相互作用が働く場合、一般には hyper-radius と hyper-angle は変数分離できません。このことは、2 体相互作用として短距離型のハードコアポテンシャルを考え、どのような hyper-angle, hyper-radius 領域で波動関数がゼロになるべきかを示した図 9 からも容易に見て取れます。そのような場合であっても、hyper-angle の方程式

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial \alpha_3^2} - 4\cot 2\alpha_3 \frac{\partial}{\partial \alpha_3} + \left(\frac{\hat{L}^2_{\boldsymbol{\rho_3}}}{\cos^2\alpha_3} + \frac{\hat{L}^2_{\boldsymbol{r_{12}}}}{\sin^2\alpha_3}\right) + mR^2 U(\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}, \boldsymbol{r_3})\right] \Phi_n(R, \alpha_3, \hat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{12}}, \hat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{3}}) = \lambda_n(R) \Phi_n(R, \alpha_3, \hat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{12}}, \hat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{3}}), \tag{68}$$

の固有関数 Φ_n を完全系の基底にとって、波動関数を

$$\Psi(\boldsymbol{r_{12}}, \boldsymbol{\rho_3}) = \frac{1}{R^{5/2}} \sum_n f_n(R) \Phi_n(R, \alpha_3, \hat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{12}}, \hat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{3}}), \tag{69}$$

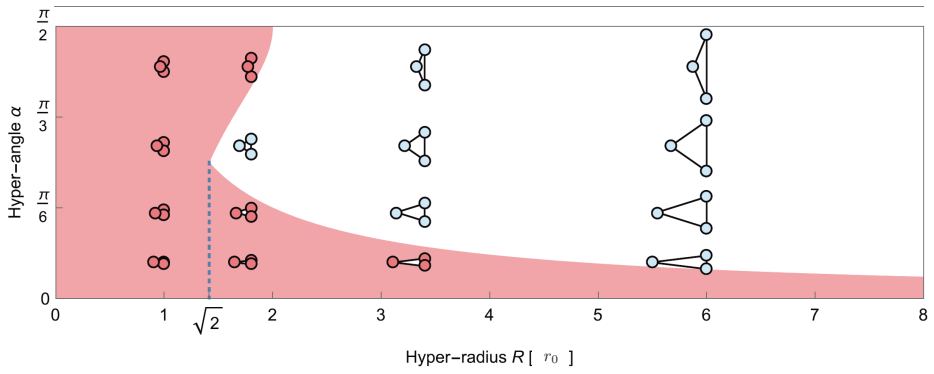


図 9: ハードコア 2 体力 $V(r_{ij}) = \infty$ $(r_{ij} < r_0)$ が存在する時に、3 粒子系でハードコアポテンシャルがかかり波動関数がゼロになるべき領域を赤で示す。ただし $\hat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{12}}$ と $\hat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{3}}$ は 90 度の角度を成すとして固定。[15] より引用。

のように展開すると、自由粒子の場合の式 (65)〜式 (67) と類似した形の方程式が得られます:

$$\frac{1}{m}\left[-\frac{\partial^2}{\partial R^2}+\frac{\lambda_n(R)+\frac{15}{4}}{R^2}\right]f_n(R)+\sum_m\left[Q_{nm}(R)+2P_{nm}(R)\frac{\partial}{\partial R}\right]f_m(R)=Ef_n(R). \tag{70}$$

式 (69) の展開は断熱超球面展開 (adiabatic hyper-spherical expansion)、式 (68) は断熱超角度方程式 (adiabatic hyper-angular equation) などと呼ばれます [62]。Hyper-radius 部分の方程式 (70) に出てくる

$$Q_{nm}(R)=-\frac{1}{m}\left\langle\Phi_n\left|\frac{\partial^2}{\partial R^2}\right|\Phi_m\right\rangle, \tag{71}$$

$$P_{nm}(R)=-\frac{1}{m}\left\langle\Phi_n\left|\frac{\partial}{\partial R}\right|\Phi_m\right\rangle \tag{72}$$

は非断熱項 (non-adiabatic term) や非断熱結合 (non-adiabatic couplings) などと呼ばれます。ここでブラケットは、hyper-angle 座標系における積分

$$\langle\Phi_n\left|\hat{A}\right|\Phi_m\rangle=\int\sin^2\alpha_3\cos^2\alpha_3 d\alpha_3 d\Omega_{\hat{\boldsymbol{r}}_{12}}d\Omega_{\hat{\boldsymbol{\rho}}_3}\Phi_n^*(R,\alpha_3,\hat{\boldsymbol{r}}_{12},\hat{\boldsymbol{\rho}}_3)\hat{A}\Phi_m(R,\alpha_3,\hat{\boldsymbol{r}}_{12},\hat{\boldsymbol{\rho}}_3) \tag{73}$$

を意味しており、hyper-radius と hyper-angle 部分の波動関数はそれぞれ以下のように規格化されているものとします。

$$\int_0^\infty dR\,|f_n(R)|^2=1, \tag{74}$$

$$\langle\Phi_n|\Phi_n\rangle=\int\sin^2\alpha_3\cos^2\alpha_3 d\alpha_3 d\Omega_{\hat{\boldsymbol{r}}_{12}}d\Omega_{\hat{\boldsymbol{\rho}}_3}\,|\Phi_n(R,\alpha_3,\hat{\boldsymbol{r}}_{12},\hat{\boldsymbol{\rho}}_3)|^2=1. \tag{75}$$

一般の 2 体力・3 体力が存在する場合には、多数の n のチャンネルが結合した方程式を数値的に解くことで 3 体問題が解けます。実際にそのような計算も行われていますが [56, 57]、$Q_{nm}(R)$ を含む結合チャンネルの Schrödinger 方程式となるため、非常に次元の大きな問題になります。

Faddeev 分解　ポテンシャルが 2 体力のみからなる $U(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)=V(\boldsymbol{r}_{12})+V(\boldsymbol{r}_{23})+V(\boldsymbol{r}_{31})$ の場合、3 つの粒子が対称的に相互作用することを利用して、問題をより単純化できると期待できます。これは Faddeev 分解と呼ばれる方法で [63]、hyper-angle 部分の波動関数を

$$\Phi_n(R,\alpha_3,\hat{\boldsymbol{r}}_{12},\hat{\boldsymbol{\rho}}_3)=\chi_n(R,\alpha_1,\hat{\boldsymbol{r}}_{23},\hat{\boldsymbol{\rho}}_1)+\chi_n(R,\alpha_2,\hat{\boldsymbol{r}}_{31},\hat{\boldsymbol{\rho}}_2)+\chi_n(R,\alpha_3,\hat{\boldsymbol{r}}_{12},\hat{\boldsymbol{\rho}}_3) \tag{76}$$

のように分解します。これまで議論していた $\Omega_3=(\alpha_3,\hat{\boldsymbol{r}}_{12},\hat{\boldsymbol{\rho}}_3)$ とは異なる取り方の Jacobi 座標と hyper-angle、$\Omega_2=(\alpha_2,\hat{\boldsymbol{r}}_{31},\hat{\boldsymbol{\rho}}_2)$, $\Omega_1=(\alpha_1,\hat{\boldsymbol{r}}_{23},\hat{\boldsymbol{\rho}}_1)$ による波動関数を導入すると

$$\begin{aligned}&\left[-\frac{\partial^2}{\partial\alpha_i^2}-4\cot 2\alpha_i\frac{\partial}{\partial\alpha_i}+\left(\frac{\hat{L}^2_{\boldsymbol{\rho}_i}}{\cos^2\alpha_i}+\frac{\hat{L}^2_{\boldsymbol{r}_{jk}}}{\sin^2\alpha_i}\right)\right]\chi_n(R,\Omega_i)\\&+mR^2V(R\sin\alpha_i)\left[\chi_n(R,\Omega_1)+\chi_n(R,\Omega_2)+\chi_n(R,\Omega_3)\right]=\lambda_n(R)\chi_n(R,\Omega_i)\end{aligned} \tag{77}$$

となり、$U=V(\boldsymbol{r}_{12})+V(\boldsymbol{r}_{23})+V(\boldsymbol{r}_{31})$ の 3 つの相互作用項をそれぞれの Faddeev 要素 χ_n に割り振ることで、方程式を単純化できます[19]。

[19] 今回は Adiabatic hyper-spherical expansion を行ったあとの hyper-angular 波動関数を Faddeev 分解した。この方法には、微分を含む非断熱項が $P_{nm}(R)=0$ となり、また対角項 $Q_{nn}(R)$ が $Q_{nn}(R)\geq 0$ と非負になることが保証されるという利点がある。一方、まず Faddeev 分解を行い、Faddeev 要素を adiabatic hyper-spherical expansion する方法もあり [12]、その場合にはこのようなきれいな性質は成り立たない。

擬ポテンシャルでの解　2 体相互作用を Bethe-Peierls 境界条件式 (26) で取り込んだ際の 3 体問題を解きます。まず、最も単純な $\hat{L}_{\boldsymbol{\rho_3}} = \hat{L}_{\boldsymbol{r_{12}}} = 0$ の場合を考えましょう。$R\sin\alpha_i \neq 0$ では相互作用は $V = 0$ なので、hyper-angle 方程式は

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - 4\cot 2\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\right]\chi_n(R,\alpha) = \left[-\frac{1}{\sin 2\alpha}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+4\right)\sin 2\alpha\right]\chi_n(R,\alpha) = \lambda_n(R)\chi_n(R,\alpha) \tag{78}$$

となります。式 (77) は $i = 1,2,3$ 全てで同じなので $\alpha_i = \alpha$ と表記しました。この解は

$$\lambda_n(R) = s_n^2(R) - 4 \tag{79}$$

として、波動関数 χ_n が $\alpha = \pi/2$ で発散しないことに留意すると

$$\chi_n(R,\alpha) = c\frac{\sin\left[s_n(R)\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]}{\sin 2\alpha} \tag{80}$$

で与えられます。Bethe-Peierls 境界条件を $r_{12} = 0$、すなわち $\alpha_3 = 0$ で適用すると ($\alpha_3 \approx \sin\alpha_3$ を用いる)

$$\frac{d}{d\alpha_3}\left[\alpha_3\left(\chi_n(R,\alpha_1)+\chi_n(R,\alpha_2)+\chi_n(R,\alpha_3)\right)\right]_{\alpha_3=0} = -\frac{R}{a}\left[\alpha_3\left(\chi_n(R,\alpha_1)+\chi_n(R,\alpha_2)+\chi_n(R,\alpha_3)\right)\right]_{\alpha_3=0} \tag{81}$$

となります。さらに、$\alpha_3 = 0$ のとき、他の Jacobi 座標系では $\alpha_1 = \alpha_2 = \dfrac{\pi}{3}$ となることを用いると、次の方程式が得られます [52, 12]。

$$\frac{8}{\sqrt{3}}\sin\left[s_n(R)\frac{\pi}{6}\right] - s_n(R)\cos\left[s_n(R)\frac{\pi}{2}\right] = -\frac{R}{a}\sin\left[s_n(R)\frac{\pi}{2}\right]. \tag{82}$$

$R/a = 0$ のユニタリー極限の場合、この方程式は

$$\frac{8}{\sqrt{3}}\sin\left[s_n(R)\frac{\pi}{6}\right] - s_n(R)\cos\left[s_n(R)\frac{\pi}{2}\right] = 0 \tag{83}$$

となり、R に全く依存しません。従って、s_n, χ_n, Φ_n はすべて R によりません。これはユニタリー極限では長さスケールを持つ量が消えて、スケール不変になるためです。そのため非断熱結合 Q_{nm}, P_{nm} は厳密にゼロになり、hyper-radial 方程式は

$$\frac{1}{m}\left[-\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{s_n^2 - \frac{1}{4}}{R^2}\right]f_n(R) = E f_n(R) \tag{84}$$

となります。この式より、$s_n^2 > 1/4$ の場合は hyper-radius の方程式に斥力的なポテンシャルが、$s_n^2 < 1/4$ の場合は引力的なポテンシャルが現れることになります。さらに次に見るように、$s_n^2 = 0$ を境に解の振る舞いが大きく変わります。言い換えると、s_n が実数か虚数かで波動関数の振る舞いが大きく変化します。

では実際に、どのような s_n が式 (83) の解として存在するのかを見ていきましょう。式 (83) を調べると、図 10 と図 11 に示す通り、たくさんの実数解 $s_1 = \pm 4.47$, $s_2 = \pm 6.82$,... に加えて[20]、純虚数解 $s_0 = \pm i1.00624\ldots$ が 1 つ存在します。実数解が現れるチャンネル $n = 1,2,\ldots$ では hyper-radial 方程式に斥力が現れるので、束縛状態などは現れません。一方、純虚数のチャンネル $n = 0$ では、以下に見るように可算無限個の束縛状態が現れ、それらの間に離散スケール不変性が成立します。すなわち Efimov 状態がこの $n = 0$ チャンネルの引力により発生するのです。

[20]最も小さい実数解 $s = 4$ は非物理的な解で spurious solution と呼ばれる。実際この解を式 (80) に代入し、式 (76) より波動関数を求めるとゼロになってしまう。Faddeev 分解をするとこのような非物理的な spurious solution が生じることがあるので、注意が必要である。

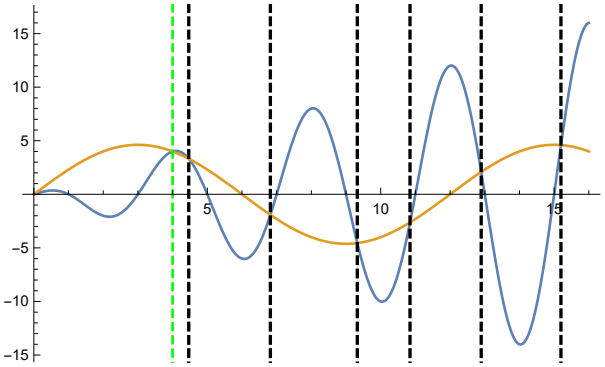


図 10: 式 (83) の実数解。橙線は $\frac{8}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{x\pi}{6}\right)$、青線は $x\cos\left(\frac{x\pi}{2}\right)$。黒点線は実数解 $s_1 = 4.47$, $s_2 = 6.82$, $s_3 = 9.32$, $s_4 = 10.84$, $s_5 = 12.90$, $s_6 = 15.20$。緑点線で示した解 $s_{spu} = 4$ は非物理的な解 (脚注参照)。

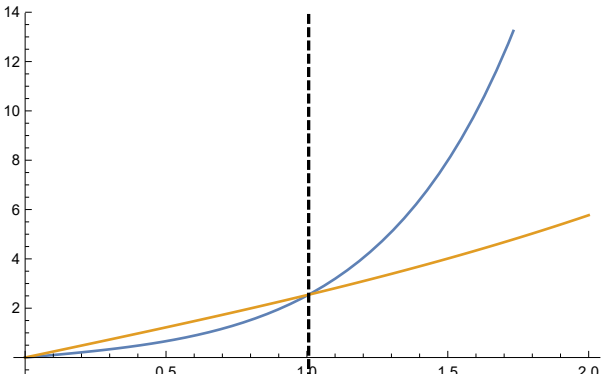


図 11: 式 (83) の虚数解。橙線は $\frac{8}{\sqrt{3}}\sinh\left(\frac{\pi x}{6}\right)$、青線は $x\cosh\left(\frac{\pi x}{2}\right)$。点線は虚数解 $s_0 = i1.00624$。

Thomas 崩壊と 3 体パラメータ　式 (84) の純虚数 s_0 に対する解析解は、$E = -\kappa^2/m$ として

$$f_0(R) = \sqrt{R}K_{i|s_0|}(\kappa R) \tag{85}$$

と、第二種変形ベッセル関数 K で与えられます。この関数は $R \to 0$ で無限に速く振動します。実際、漸近形

$$K_{i|s_0|}(z \to 0) \quad \propto \quad \sin\left[|s_0|\ln\left(\frac{z}{2}\right) - \frac{1}{2}\arg\left(\frac{\Gamma(i|s_0|+1)}{\Gamma(-i|s_0|+1)}\right)\right] \tag{86}$$

を用いると、hyper-radial 関数は

$$f_0(R) = c_1 R^{\frac{1}{2}+i|s_0|} + c_2 R^{\frac{1}{2}-i|s_0|} \quad (R \ll \kappa^{-1}) \tag{87}$$

という out-going term と in-coming term の和の形になっていることが見て取れます。波動関数が無限回振動するということは、「あるエネルギー E_0 での波動関数の節の数は、$E < E_0$ の束縛状態の数と等しい」という Levinson の定理を用いると、束縛状態が無限個あるということになります。また、上記の議論は任意の $E < 0$ に対して成立するので、「束縛エネルギーがいくらでも大きな状

態が無限個存在する」という、一見意味不明な結果になります。この病的な結果は Thomas 崩壊 (Thomas collapse) と呼ばれています [64]。この結果は 1935 年に Thomas によって発見されており、非常に古くから知られていましたが、その物理的な意味を初めて正しく理解したのが Efimov です[21]。この $R = 0$ 付近での病的な結果は、ゼロレンジ理論を使った結果生じたものです。しかし実際の物理系では相互作用のレンジ b は小さいですが有限です。もし $R \lesssim b$ ならば上記のゼロレンジ理論は破綻するはずで、相互作用ポテンシャルによる複雑な散乱が生じます。従って、上記のゼロレンジ理論による計算は $R \gg b$ でのみ正しいのです。$R \lesssim b$ における複雑な散乱の効果は、2 体問題の Bethe-Peierls 境界条件と同様に、

$$\frac{d}{dR}\log[R^{-\frac{1}{2}} f_0(R)]\bigg|_{R=R_0} = \Lambda \tag{88}$$

という境界条件として、$R_0 \gtrsim b$ を満たすパラメータ R_0 を用いて取り込めます。この R_0 と Λ は 3 体パラメータ (three-body parameter) と呼ばれ、短距離での 3 粒子系の位相シフトを記述する量です。実際、この境界条件を式 (87) に課すと

$$f_0(R) = \left(1 + \frac{R_0\Lambda}{is}\right)\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}+i|s_0|} + \left(1 - \frac{R_0\Lambda}{is}\right)\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}-i|s_0|} \quad (R \ll \kappa^{-1}) \tag{89}$$

となり、境界条件が in-coming term と out-going term の係数の比、すなわち 3 体の phase shift を決めていることが分かります。Efimov 状態の離散スケール不変性は、変形ベッセル関数がこのように $\log R$ について周期的に振動すること (式 (86)) に由来しています。

離散スケール不変性と量子アノマリー　式 (86) を用いると、以下のように可算無限個の束縛状態が現れることになります。

$$E_n = -\frac{\kappa_n^2}{m} = -\frac{4}{mR_0^2}\exp\left(-\frac{2n\pi}{|s_0|}\right)\exp\left(\frac{2}{|s_0|}\left[\mathrm{Arccot}\left(\frac{\Lambda R_0}{|s_0|}\right) + \frac{1}{2}\arg\left(\frac{\Gamma(i|s_0|+1)}{\Gamma(-i|s_0|+1)}\right)\right]\right) \quad (n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots) \tag{90}$$

これより、次の Efimov 状態の離散スケール不変なエネルギースペクトルを得ます。

$$\frac{|E_n|}{|E_{n+1}|} = \exp\left(\frac{2\pi}{|s_0|}\right) = 515.03... \tag{91}$$

これを長さスケールに直すと $e^{\pi/|s_0|} = 22.694...$ になります[22]。

式 (90) では一見束縛エネルギーが大きな方 (n が負) へも、小さな方へ (n が正) も無限に状態が続いていくように見えます。しかし、式 (90) の導出で用いた $R \ll \kappa^{-1}$ という条件は、束縛エネルギーが大きくなるにつれて破綻し、基底状態のエネルギーは

$$E_{\mathrm{GS}} \equiv -\frac{\kappa_*^2}{m} \sim -\frac{2}{mb^2} \tag{92}$$

[21] Thomas の論文 [64] は 1935 年の論文としては驚くべきものです。Thomas は、中性子間の相互作用をゼロと仮定して、中性子 2 つと陽子 1 つからなる 3 体問題を考え、3 体系の束縛エネルギーと中性子・陽子の相互作用レンジとの間に成立する厳密な不等式を得ました。そして、中性子・陽子相互作用レンジがゼロの極限で基底状態のエネルギーが $-\infty$ となることを発見しました。また、観測されている三重水素核のエネルギーの値と計算を比較することで、「陽子・中性子間の相互作用のレンジが 10^{-15} m 程度以上である」ことや「中性子間の相互作用が非常に強く、無視してはいけない」ということを、なんと 1935 年の段階で指摘しているのです (cf. 1932 年 中性子の発見、1935 年 湯川 π 中間子理論)。

[22] この値は $e^{\pi} = 23.14...$ に非常に近いですが、これは $|s_0| = 1.00624$ が 1 に近いためで、全くの偶然です。実際、このスケール因子は異種粒子混合系やフェルミ粒子系では、質量などに依存して変化し、全く異なる値になります (Sec. 4.1 参照)。

となります。この基底状態のエネルギーと 3 体パラメータ (R_0, Λ) の値は対応しているため、κ_* を 3 体パラメータと呼ぶこともあります。一方、束縛エネルギーが小さい側では束縛状態のサイズがどんどん大きくなるので、短距離部分による制約は受けず、原理的には可算無限個の束縛状態が存在します[23]。

この Efimov 状態の離散スケール不変性には、3 体パラメータの導入（式 (88)）が本質的な役割を果たしています。Hyper-radial 方程式 (84) は、任意の正の実数 c に対して $R \to cR$ というスケール変換の下で不変です。そのように Schrödinger 方程式が連続スケール不変性をもつため、その解であるエネルギー固有状態も連続スケール不変性を持つ、と一見思えます。しかし、もしそれが本当だと、1 つの束縛状態 $(E, \psi_E(R))$ が見つかったら、任意の正の実数 c に対して $(c^2E, \psi_E(cR))$ も固有状態になってしまい、「束縛状態なのに連続的なスペクトルを持つ」というおかしな事態になってしまいます。それを解消するのが 3 体パラメータの導入（式 (88)）です。量子力学的な効果で 3 粒子間に引力が働き、基底状態のエネルギーが負に発散するという病的な振る舞いを回避するために 3 体パラメータを導入しましたが、実はこの境界条件を入れることにより、対称性が連続スケール対称性から離散スケール対称性に破れているのです。このように、古典的には存在する対称性 (ここではスケール対称性) が量子力学的な効果によって破れることを、量子アノマリーと呼びます。Efimov 効果は、量子アノマリーの典型的な一例であると言われています。

有限散乱長の場合　この場合、式 (82) を数値的に解いた上で、hyper-radial 方程式を解かなくてはなりません。$s_n(R)$ や hyper-angular 波動関数は R に陽に依存し、非断熱チャンネル結合 $Q_{nm}(R)$ も存在するため、エネルギースペクトルを正確に求めるのはやや厄介です[24]。しかし、式 (82) と式 (70) から次のことが言えます：ある a で、エネルギー $E = -\kappa^2/m$ の束縛状態が存在したとしましょう。その解に対して $a \to e^{\pi/|s_0|}a$, $\kappa \to e^{-\pi/|s_0|}\kappa$, $R \to e^{\pi/|s_0|}R$ とした波動関数も同じ方程式を満たします。また、3 体パラメータの境界条件式 (88) についても $R \ll \kappa^{-1}$ で式 (89) が成立すると仮定すると、$\Lambda \to e^{-\pi/|s_0|}\Lambda$, $R_0 \to e^{\pi/|s_0|}R_0$ と変換すれば不変です。このことより、「$(a^{-1}, \mathrm{sgn}(E)\kappa)$ 平面で 3 体束縛状態のエネルギースペクトルが $(a_n^{-1}, -\kappa_n)$ という点に存在したら、それを radial 方向に $e^{\pi/|s_0|}$ 倍スケールした $(a_{n-1}^{-1}, -\kappa_{n-1}) = (e^{\pi/|s_0|}a_n^{-1}, -e^{\pi/|s_0|}\kappa_n)$ にも存在する」、という動径スケーリング則 (Radial scaling law) が成立します。このことは、ある n についてエネルギースペクトル E_n が散乱長 a の関数として求まったならば、そのエネルギースペクトルを $(a^{-1}, \mathrm{sgn}(E)\kappa)$ 平面で $e^{\pi/|s_0|}$ 倍していけば、全ての Efimov 状態のエネルギースペクトルが得られる、ということを意味しています。そのため Efimov 状態のエネルギースペクトルは $(a^{-1}, \kappa) = (0, 0)$ のまわりに、自己相似的な形で分布します。その様子を図 12 に示します。

散乱長が $1/a = 0$ から大きく外れた場合に Efimov 状態がどのようになるかも図 12 に示されています。実は $1/a < 0$ という 2 粒子束縛状態が存在しない領域でも Efimov 状態は存在できます。そして、ある負の散乱長 $a = a_-$ において、3 つの粒子に分解します。この $1/a_- < 1/a < 0$ で 2 粒子は束縛しないが 3 粒子で束縛している状態を、3 つの輪が絡まりあっている結び目であるボロ

[23] 通常の量子力学が破綻するといわれるプランクスケール $R_{\mathrm{pl}} = 10^{-35}$ m と、現在観測されている領域の宇宙のサイズ $R_{\mathrm{univ}} = 10^{27}$ m を用いると、Efimov 状態の数は $\frac{|s_0|}{\pi}\log(R_{\mathrm{univ}}/R_{\mathrm{pl}}) = 45.7...$ となり、40 個程度しか実現できない。

[24] Efimov 状態が現れるチャンネルは引力、それ以外のチャンネルは斥力の hyper-radial ポテンシャルであるため、これらのチャンネル間の波動関数の重なり積分は小さいです。そのため、ゼロレンジ近似の場合には、$Q_{nm}(R)$ や $P_{nm}(R)$ は小さくなります。しかし、有限レンジ効果 (Sec. 4.3 参照) が強く効く基底状態などについてはチャンネル結合が大きくなることもあります。

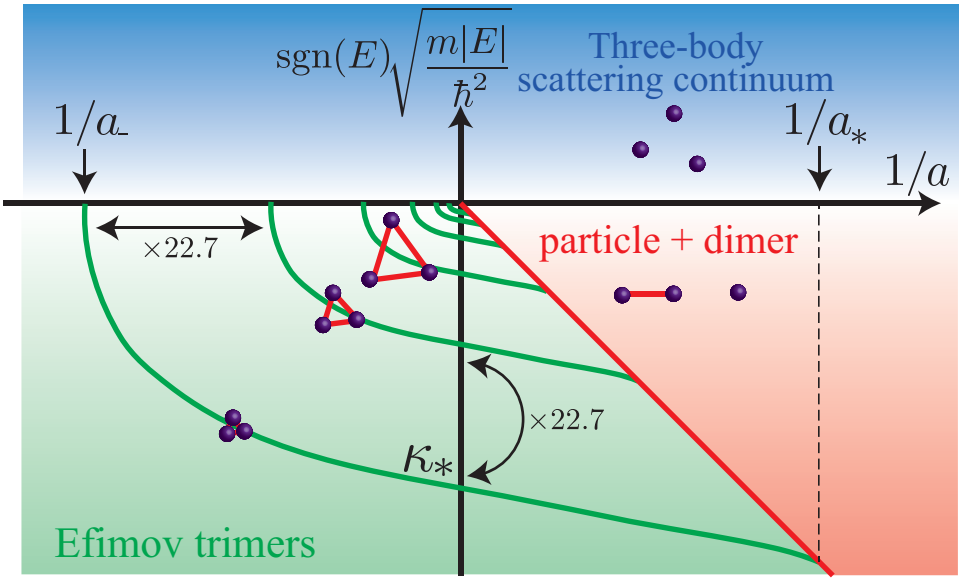


図 12: ゼロレンジ理論で得られる、Efimov 状態のエネルギースペクトル。3 粒子束縛状態 (Efimov 状態, 緑線) と式 (17) で与えられる 2 粒子束縛状態 (赤線) が描かれている。

ミアンリングになぞらえて、ボロミアン状態とも呼びます。$a < 0$ の領域でボロミアン状態であることが、Efimov 状態の 2 つ目の特徴になります。このことは、式 (82) で $R \gg |a|$ の時を考えると定性的に理解できます。$a < 0$ のときは $s_0(R) \to 2$ となり斥力的なポテンシャルが生じます。そのため、$1/a = 0$ から負の方向に $1/a$ が小さくなるにつれ、その斥力部分が相対的に増えて、最終的に 3 粒子がバラバラに分解してしまいます。

一方、$a > 0$ ではボロミアン状態ではありません。そして散乱長を徐々に小さく ($1/a$ を大きく) していくと、Efimov 状態はある正の散乱長 $a = a_*$ で「dimer+particle 状態」へ分解します[25]。実際、$a > 0$ の場合には、$R/a \to +\infty$ で $s_0(R) = iR/a$ という純虚数解が存在でき、

$$\frac{s_0^2(R)}{mR^2} \to -\frac{1}{ma^2} \tag{93}$$

という 2 粒子束縛状態のエネルギー式 (17) に漸近します。これは、3 粒子束縛状態が $R \gg a$ で 2 体束縛状態+1 粒子に分解することを意味しています。

式 (82) を解析して得られる最終的な結果は以下のようになります[26]

$$\frac{s_0^2(R)}{mR^2} = \begin{cases} -\frac{|s_0|^2}{mR^2}\left(1 + 1.342\frac{R}{a}\right) & (R \ll a) \\ -\frac{1}{ma^2}\left(1 + \frac{16}{\sqrt{3}}\frac{a}{R}e^{-\pi R/3a}\right) & (R \gg a) \end{cases} \quad (a > 0) \tag{94}$$

$$\frac{s_0^2(R)}{mR^2} = \begin{cases} -\frac{|s_0|^2}{mR^2}\left(1 - 1.342\frac{R}{|a|}\right) & (R \ll |a|) \\ \frac{4}{mR^2}\left(1 - \frac{12}{\pi}\frac{|a|}{R}\right) & (R \gg |a|) \end{cases} \quad (a < 0). \tag{95}$$

[25]負の散乱長での臨界値は「a_-」と呼ぶ一方、正の方は「a_*」と呼びます。これは歴史的な理由により「a_+」を他のものを指すために用いるからです。(図 17 の左側のように $a > 0$ でロスレートを観測した際に周期的に現れるディップの位置を与える散乱長を a_+ と表記します。)

[26]有限散乱長での $s_n(R)$ や $\frac{s_n^2(R)}{mR^2}$ の R/a 依存性は [12] の Figure 20 や Figure 21 を参照。

これらの結果からも、図 12 のように定性的に振る舞うだろうということがおおよそ理解できます。同様の結果は、Sec. 4 で紹介する Born-Oppenheimer 近似を用いた解析からも導くことができます。

この節で紹介した hyper-spherical expansion の方法は、物理的な描像が非常に明快な一方、定量的にエネルギースペクトルの形状を求めるのには不向きです。実際、ゼロレンジ理論ですらチャンネル結合した方程式 (70) を解かなくてはなりません。これに対して、次節で紹介する方法では、このチャンネル結合が自然に取り込まれて、数値的に図 12 のようなスペクトルを得るのが非常に容易だという利点があります。

3.2 運動量空間の方法：Skorniakov–Ter-Martirosian 方程式の方法

前節では実空間で 3 体問題を解きましたが、運動量空間でも解けます。この節では、最も有名な Skorniakov–Ter-Martirosian 方程式[27]の方法を紹介します [54]。ここでは、運動量空間の解析に適した分離型ポテンシャル式 (33) を用います。Jacobi 座標系で表した 3 体 Schrödinger 方程式

$$\left[-\frac{\nabla^2_{\boldsymbol{r_{12}}}}{m}-\frac{3\nabla^2_{\boldsymbol{\rho_3}}}{4m}+\sum_{i<j}g|\phi^{(ij)}\rangle\langle\phi^{(ij)}|\right]\Psi(\boldsymbol{r_{12}},\boldsymbol{\rho_3})=E\Psi(\boldsymbol{r_{12}},\boldsymbol{\rho_3}) \tag{96}$$

を考えます。ここで $|\phi^{(ij)}\rangle$ は、i, j 粒子間に分離型ポテンシャル ϕ が作用していることを表します。これを運動量空間に Fourier 変換すると (i, j, k は巡回的にとる)

$$\left(p_3^2+\frac{3}{4}P_3^2\right)\Psi(\boldsymbol{p_3},\boldsymbol{P_3})+mg\sum_{k=1,2,3}\phi(\boldsymbol{p_k})\int\frac{d^3\boldsymbol{q_k}}{(2\pi)^3}\phi^*(\boldsymbol{q_k})\Psi(\boldsymbol{q_k},\boldsymbol{P_k})=mE\Psi(\boldsymbol{p_3},\boldsymbol{P_3}) \tag{97}$$

となります。ここで、$(\boldsymbol{p_3},\boldsymbol{P_3})$ は $(\boldsymbol{r_{12}},\boldsymbol{\rho_3})$ に共役な Jacobi 座標系での相対運動量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p_3}&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{k_2}-\boldsymbol{k_1})\\ \boldsymbol{P_3}&=\frac{2}{3}\left(\boldsymbol{k_3}-\frac{\boldsymbol{k_2}+\boldsymbol{k_1}}{2}\right)\end{aligned} \tag{98}$$

で、$(\boldsymbol{p_1},\boldsymbol{P_1})$、$(\boldsymbol{p_2},\boldsymbol{P_2})$ も同様に定義されます。式 (97) は、式 (96) に左側から $\langle\boldsymbol{p_3},\boldsymbol{P_3}|$ を作用させ、$\langle\boldsymbol{p_3},\boldsymbol{P_3}|\Psi\rangle=\Psi(\boldsymbol{p_3},\boldsymbol{P_3})$ や

$$\langle\boldsymbol{p_3},\boldsymbol{P_3}|\phi^{(ij)}\rangle=\sum_{\boldsymbol{q'_k},\boldsymbol{Q'_k}}\langle\boldsymbol{p_3},\boldsymbol{P_3}|\boldsymbol{q'_k},\boldsymbol{Q'_k}\rangle\langle\boldsymbol{q'_k},\boldsymbol{Q'_k}|\phi^{(ij)}\rangle=\sum_{\boldsymbol{q'_k},\boldsymbol{Q'_k}}\langle\boldsymbol{p_3},\boldsymbol{P_3}|\boldsymbol{q'_k},\boldsymbol{Q'_k}\rangle\phi(\boldsymbol{q'_k})\langle\boldsymbol{Q'_k}|=\phi(\boldsymbol{p_k})\langle\boldsymbol{P_k}| \tag{99}$$

や

$$\langle\phi^{(ij)}|\Psi\rangle=\sum_{\boldsymbol{q_k},\boldsymbol{Q_k}}\langle\phi^{(ij)}|\boldsymbol{q_k},\boldsymbol{Q_k}\rangle\langle\boldsymbol{q_k},\boldsymbol{Q_k}|\Psi\rangle=\sum_{\boldsymbol{q_k},\boldsymbol{Q_k}}|\boldsymbol{Q_k}\rangle\phi^*(\boldsymbol{q_k})\Psi(\boldsymbol{q_k},\boldsymbol{Q_k}) \tag{100}$$

を用いることで導けます。式 (97) は

$$F(\boldsymbol{P})=mg\int\frac{d^3\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3}\phi^*(\boldsymbol{q})\Psi(\boldsymbol{q},\boldsymbol{P}) \tag{101}$$

[27] Skorniakov と Ter-Martirosian の 2 人が発見した方程式です。紛らわしいですが、Ter-Martirosian が 1 人の人物の名前です。

を導入すると、

$$\left(p_3^2+\frac{3}{4}P_3^2-mE\right)\Psi(\boldsymbol{p_3},\boldsymbol{P_3})+\sum_{k=1,2,3}\phi(\boldsymbol{p_k})F(\boldsymbol{P}_k)=0 \tag{102}$$

となり、この解は

$$\Psi(\boldsymbol{p_3},\boldsymbol{P_3})=\Psi^{(0)}(\boldsymbol{p_3},\boldsymbol{P_3})-\frac{\sum_k\phi(\boldsymbol{p_k})F(\boldsymbol{P}_k)}{p_3^2+\frac{3}{4}P_3^2-mE+i0} \tag{103}$$

になります[28]。第一項 $\Psi^{(0)}$ は入射波を記述する項で、束縛状態を考える際には不要なので、以下では無視します。これを式 (101) に代入して整理すると

$$\left[\frac{1}{mg}+\int\frac{d^3\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3}\frac{|\phi(\boldsymbol{q})|^2}{q^2+\frac{3}{4}P_3^2-mE+i0}\right]F(\boldsymbol{P}_3)=-\int\frac{d^3\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3}\phi^*(\boldsymbol{q})\left[\frac{\phi(\boldsymbol{p_1})F(\boldsymbol{P}_1)}{p_1^2+\frac{3}{4}P_1^2-mE+i0}+\frac{\phi(\boldsymbol{p_2})F(\boldsymbol{P}_2)}{p_2^2+\frac{3}{4}P_2^2-mE+i0}\right] \tag{104}$$

右辺の 2 つの項は全く同じ寄与を与えるので、片方のみを考えて 2 倍すればよいです。左辺は、式 (41) を用いると運動量 $q_0=\sqrt{mE-\frac{3}{4}P_3^2}$ における 2 体 T 行列で表せて、

$$\frac{|\phi(q_0)|^2}{T(q_0,q_0)}F(\boldsymbol{P}_3)=-2\int\frac{d^3\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3}\frac{\phi^*(\boldsymbol{q})\phi(\boldsymbol{p_1})}{p_1^2+\frac{3}{4}P_1^2-mE+i0}F(\boldsymbol{P}_1) \tag{105}$$

となります。これを閉じた方程式にするには、異なる Jacobi 座標系の運動量 $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{P_3}),(\boldsymbol{p_1},\boldsymbol{P_1})$ の間の関係が必要です。この関係は式 (98) などから[29]

$$\boldsymbol{P_1}=-\boldsymbol{q}-\frac{1}{2}\boldsymbol{P_3} \tag{106}$$

$$\boldsymbol{p_1}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{q}+\frac{3}{4}\boldsymbol{P_3} \tag{107}$$

で与えられます。これより、$\boldsymbol{P}_3$ 固定の下では、積分変数を $\boldsymbol{q}$ から $\boldsymbol{P}_1$ に変更できることが分かります。この新しい変数 $\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_3$ により

$$\boldsymbol{q}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{P_3}-\boldsymbol{P_1} \tag{108}$$

$$\boldsymbol{p_1}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{q}+\frac{3}{4}\boldsymbol{P_3}=\frac{1}{2}\boldsymbol{P_1}+\boldsymbol{P_3} \tag{109}$$

と表されることを利用すると、一般の分離型ポテンシャルに対する以下の Skorniakov–Ter-Martirosian 方程式を得ます [54]

$$\frac{|\phi(q_0)|^2}{T(q_0,q_0)}F(\boldsymbol{P}_3)=-2\int\frac{d^3\boldsymbol{P_1}}{(2\pi)^3}\frac{\phi^*\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{P_3}-\boldsymbol{P_1}\right)\phi\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{P_1}+\boldsymbol{P_3}\right)}{P_3^2+P_1^2+\boldsymbol{P_1}\cdot\boldsymbol{P_3}-mE+i0}F(\boldsymbol{P}_1) \tag{110}$$

この方程式は 3 次元の線形積分方程式ですが、球対称な分離型ポテンシャルの場合には、F を

$$F(\boldsymbol{P})=\sum_{\ell,m}F_{\ell,m}(P)Y_{\ell,m}(\hat{\boldsymbol{P}}) \tag{111}$$

と球面調和関数で展開すると、各 $F_{\ell,m}$ は独立になり、1 次元の線形積分方程式になります。これを数値的に解けば 3 体問題は解けたことになります。このように、3 体問題が最終的に数値的に非常に扱いやすい方程式に帰着することが、分離型ポテンシャルの強みです。

[28] 第一項の起源については式 (39) や式 (40) などを参照。

[29] $\boldsymbol{q}$ は 1・2 粒子間の相対運動量で、$\boldsymbol{p_3}$ に相当します（積分変数なので別記号を使っています）。

ステップ関数型の分離型相互作用　式 (46) と式 (47) から Λ が大きいときは

$$T^{-1}(k,k) \approx \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{a} + ik\right] = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{a} - \sqrt{-k^2}\right] \tag{112}$$

となります。さらに、$|\frac{1}{2}\boldsymbol{P_3} + \boldsymbol{P_1}| < \Lambda, |\frac{1}{2}\boldsymbol{P_1} + \boldsymbol{P_3}| < \Lambda$ という積分領域の条件も、Λ が大きいときには $|\boldsymbol{P_1}| < \Lambda$ と近似でき、

$$\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{a} - \sqrt{\frac{3}{4}P_3^2 - mE}\right] F(\boldsymbol{P}_3) = -2\int_{|\boldsymbol{P_1}|<\Lambda} \frac{d^3\boldsymbol{P_1}}{(2\pi)^3} \frac{1}{P_3^2 + P_1^2 + \boldsymbol{P_1}\cdot\boldsymbol{P_3} - mE + i0} F(\boldsymbol{P}_1) \tag{113}$$

を得ます。これは各部分波 $F_{\ell,m}(P)$ に対して独立な方程式を与えます。特に興味のある $\ell = 0$ の場合、角度積分については

$$\int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{1}{q^2 + p^2 + qp\cos\theta - mE + i0} = \frac{1}{qp}\log\left(\frac{q^2 + p^2 + qp - mE}{q^2 + p^2 - qp - mE}\right) \tag{114}$$

を用いることで、以下の形のシンプルな Skorniakov–Ter-Martirosian 方程式を得ます [54]

$$\left[\frac{1}{a} - \sqrt{\frac{3}{4}P_3^2 - mE}\right] F(P_3) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\Lambda dP_1 \frac{P_1}{P_3}\log\left(\frac{P_3^2 + P_1^2 + P_1P_3 - mE}{P_3^2 + P_1^2 - P_1P_3 - mE}\right) F(P_1) \tag{115}$$

ここで運動量カットオフ Λ を無限大にとりたくなりますが、そうすると P が大きいところで $F(P)$ が非常に速く振動し、この式を数値的に解けなくなります。これは、hyper-spherical 座標の方法でゼロレンジ理論を用いると、$R \to 0$ で波動関数が高速に振動して Thomas 崩壊が起こることに対応しています。Skorniakov–Ter-Martirosian 方程式の方法では、この Λ が 3 体パラメータに相当します[30]。そして、この式を数値的に解くことで、図 12 のように、散乱長が負の領域で Efimov 状態が現れ、正の領域で 2 体束縛状態＋粒子に分解していく様子が得られます。ちなみに式 (115) からも Efimov 状態の離散スケール不変性は解析的に示せます。そのことを見てみましょう。$1/a = 0, E = 0, \Lambda \to \infty$ を考えると、積分方程式はスケール不変になるため、解は

$$F(P) = P^{\pm s - 2} \tag{116}$$

となるべきです[31]。これを代入すると、

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{2}{\pi}\int dx \log\left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}\right) x^{\pm s - 1} \tag{117}$$

となり、積分公式[32]

$$\int_0^\infty dx \log\left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}\right) x^{\pm s - 1} = \frac{2\pi}{s}\frac{\sin(\pi s/6)}{\cos(\pi s/2)} \tag{118}$$

を利用して積分を実行することで s に対する決定方程式 (83) が得られます。$s = i|s_0|$ という純虚数解に対して式 (116) の波動関数が実数になるようにすると、

$$F(P) = c_1 P^{i|s_0| - 2} + c_2 P^{-i|s_0| - 2} \tag{119}$$

[30] 例えば、$1/a = 0$ での基底状態のエネルギーは $\kappa_* = 0.18\Lambda$ となります。

[31] ここで P の冪にあえて -2 を入れています。これは、最終的にこの s が、hyper-angular 方程式の方法で求めた s と一致するようにするためです。

[32] 計算は複素積分などを用いると比較的簡単にできる。詳細は [65] などを参照。

となります。これはちょうど式 (87) の Fourier 変換のような形になっており、確かに Skorniakov–Ter-Martirosian 方程式に Efimov 状態特有の離散スケール不変な解が含まれていることが分かります。

Skorniakov と Ter-Martirosian は、1957 年に重陽子と中性子の散乱問題を扱うためにこの積分方程式 (115) を導出し、解くことに成功していました。しかし、上記のような離散スケール不変な解が存在することを発見するまでには至らず、Efimov 状態の発見はその後 10 年以上待つことになります。Skorniakov と Ter-Martirosian が、あとほんの一歩だけ考察を進めていれば、歴史は変わり、「Efimov 状態」ではなく「Skorniakov–Ter-Martirosian 状態」と呼ばれていたかもしれませんね。

Skorniakov–Ter-Martirosian 方程式の方法は積分方程式を扱うため、物理的な明快さでは hyper-spherical 方程式の方法に劣ります。しかし、hyper-spherical 方程式の方法のような複雑なチャンネル結合が現れない点や、ステップ関数以外の分離型ポテンシャルを考えて相互作用ポテンシャルの詳細を取り込むような拡張が容易な点が長所です。また、particle-dimer の間の s 波散乱長もほとんど同じ式から計算できます。導出は割愛しますが、

$$\left[\sqrt{\frac{3}{4}p^2+a^{-2}}-\frac{1}{a}\right]a_{\rm AD}(p)=-\frac{2p^2}{p^2+a^{-2}}+\frac{2}{\pi}\int_0^\Lambda dq\frac{p}{q}\log\left(\frac{p^2+q^2+pq+a^{-2}}{p^2+q^2-pq+a^{-2}}\right)a_{\rm AD}(q), \tag{120}$$

を数値的に解いて得られる解のゼロ運動量での値 $a_{\rm AD}(p=0)$ が、particle-dimer 散乱の閾値エネルギー $E=-1/ma^2$ における s 波散乱長を与えます。

3.3 Efimov 状態のユニバーサリティ

上記の理論では、相互作用ポテンシャルが短距離型であること、$1/a=0$、$E\to 0$ という、非常にシンプルな仮定しか用いていません。つまり、自然界のあらゆる系において、もし散乱長が発散的に大きければ、Efimov 状態は必ず現れ、低エネルギー領域では上記の理論により統一的に記述できます。そして、図 12 のエネルギースペクトルの形状や $e^{\pi/|s_0|}=22.69...$ の離散スケール不変性が現れます。これが Efimov 状態のユニバーサリティです。また、ゼロレンジ理論で Efimov 状態を記述するのに必要なパラメータは $1/a$ と 3 体パラメータのみでした。すなわち、この 2 つのパラメータによって、Efimov 状態はユニバーサルに記述されます。これは、2 体問題で散乱長のみによって 2 体束縛状態がユニバーサルに記述できたことと類似しています。3 体パラメータとして、hyper-spherical 方程式の方法では (R_0,Λ) をとりましたが、実際には、ユニタリー極限での基底状態のエネルギー $E=-(\kappa_*)^2/m$ を与える κ_*、散乱長が負の領域で Efimov 状態が 3 粒子に分解する臨界点 a_-、正の領域で 2 粒子束縛状態+1 粒子に分解する臨界点 a_* などを 3 体パラメータとして採用することが多いです (図 12 参照)。これらはゼロレンジ近似の下では、

$$a_-^{-1}=-0.64\kappa_* \tag{121}$$

$$a_*^{-1}=14.1\kappa_* \tag{122}$$

と 1 対 1 に対応することが式 (115) を数値的に解くことで示せます [12]。このように理想的な状況 $1/a\to 0, E\to 0$ ではユニバーサリティは厳密に成立し、あらゆる物理系を統一的に記述できるのですが、現実の物理系では、散乱長やエネルギーが有限です。その効果により、ゼロレンジ

理論からずれが生じます。Sec. 5 で見るように、原子核系などでこれまで Efimov 状態が明瞭に見えていないことや、冷却原子で 2–3 個しか Efimov 状態が観測できないことは、これらのパラメータが有限で、理想的なゼロレンジ極限からずれていることが原因です。

4 Efimov 状態の物理的理解をさらに深める理論

4.1 Born-Oppenheimer 近似

異種粒子混合系を考えましょう。2 粒子が同種ボース粒子 (質量 M) で、これらがもう 1 つの質量 m の粒子と大きな散乱長 a で相互作用すると仮定します。また、同種粒子間の相互作用は、散乱長が特に大きくない通常の短距離相互作用であるとして、ひとまず無視します。$M \gg m$ の場合には、Born-Oppenheimer 近似が使えます。Born-Oppenheimer 近似では、まず重い粒子を位置 $\boldsymbol{x_1}$ と $\boldsymbol{x_2}$ に固定した下で軽い粒子の Schrödinger 方程式を解き、固有値 $E(r)$ を求めます ($r \equiv |\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}|$)。Bethe-Peierls 境界条件の方法で重い粒子と軽い粒子の間の 2 体相互作用を取り込むと、軽い粒子の $\phi(\boldsymbol{y})$ についての方程式は

$$-\frac{\nabla_{\boldsymbol{y}}^2}{2m}\phi(\boldsymbol{y}) = E(r)\phi(\boldsymbol{y}) \tag{123}$$

となり、$|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x_1}| \to +0$ および $|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x_2}| \to +0$ で Bethe-Peierls 境界条件を課すことになります。これは解析的に解け、特に $E(r) < 0$ の時の解は

$$\phi(\boldsymbol{y}) = \frac{\exp\left(-\kappa(r)|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x_1}|\right)}{|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x_1}|} \pm \frac{\exp\left(-\kappa(r)|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x_2}|\right)}{|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x_2}|}, \tag{124}$$

となります。ここで $\kappa(r)$ は Bethe-Peierls 境界条件から以下のように決まります：

$$\kappa(r) \mp \frac{e^{-\kappa(r)r}}{r} = \frac{1}{a}. \tag{125}$$

この決定方程式の解は、Lambert W 関数を用いて[33]

$$\kappa_\pm(r) = \frac{1}{a} + \frac{1}{r}W(\pm e^{-r/a}), \tag{126}$$

と表せます。これより、軽い粒子の固有値 $E(r)$ は

$$E_\pm(r) = -\frac{\kappa_\pm(r)^2}{2m} \tag{127}$$

と与えられ、これを用いて重い粒子の間の Schrödinger 方程式は

$$\left[-\frac{\nabla_r^2}{M} + E_\pm(r)\right]\psi(r) = E\psi(r) \tag{128}$$

となります。図 13 に $E_\pm$ を示します。+ の時に引力的なポテンシャル、– の時には斥力的なポテンシャルが現れます。これは、軽い粒子の波動関数式 (124) が、原子分子化学の LCAO 法でいう結合性軌道 (+) と反結合性軌道 (–) を形成しており、それぞれが引力・斥力を生じていると理解できます。特に結合性軌道 (+) に対して

$$E_+(r) = \begin{cases} -\frac{\Omega^2}{2mr^2} & (r \ll a) \\ -\frac{1}{2ma^2} - \frac{1}{mar}\exp\left(-\frac{r}{a}\right) & (r \gg a) \end{cases} \quad (a > 0) \tag{129}$$

[33] Lambert W 関数は xe^x の逆関数として定義される。

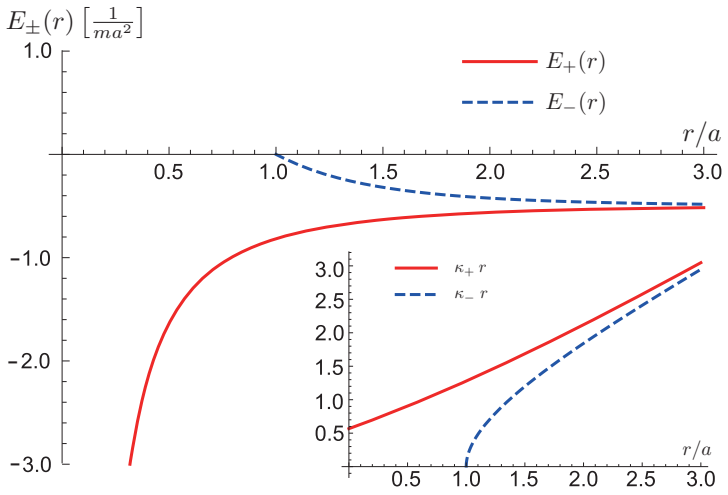


図 13: $a > 0$ において、Born-Oppenheimer 近似で求めたポテンシャル $E_\pm$。Inset には $\kappa_\pm(r)r$ を示す。

になり、$r \ll a$ で r^{-2} の引力が発生します。ここで $\Omega = W(1) = 0.5671...$ は $x = e^{-x}$ の解で、Ω 定数と呼ばれます。このポテンシャルの下での方程式 (128) は Efimov 状態の方程式 (84) と同じ形をしています。そのため、結合性軌道 (+) の側に Efimov 状態が現れ、$1/a = 0$ では離散スケール不変性をもつ 3 粒子束縛状態が可算無限個現れます。そのスケール因子 $e^{\pi/|s|}$ は

$$|s|^2 = \frac{M}{2m}\Omega^2 - \frac{1}{4} \tag{130}$$

で与えられます。

これらの計算結果から以下のことが読み取れます：

1. Efimov 状態の本質は、1 つの粒子が残り 2 つの粒子の間に結合性軌道を組むことである。 実際、式 (124) の結合性軌道では、軽い粒子が $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}$ それぞれの周りに $\min[r, a]$ 程度の幅で分布し、2 つの重い粒子の間の引力を媒介していることが見て取れます。その意味で原子分子化学での共有結合と似たような現象なのですが、この現象が相互作用ポテンシャルのレンジ b よりもはるかに大きな長さスケール a で “ハロー” 的に生じているのが顕著な違いです。

2. Efimov 状態の波動関数の形状は「細長い 2 等辺三角形」。 式 (124) より、軽い粒子はおおよそ $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}$ いずれかのまわりに存在することが分かります。従って、Efimov 状態の波動関数の形状は「細長い 2 等辺三角形」です。実際、hyper-spherical 座標の方法でも式 (80) より hyper-angular 波動関数は $\alpha = 0$ のまわりにピークを持ち、それは「細長い 2 等辺三角形」の形状を意味します。また、軽い粒子の状態は、$\boldsymbol{x_1}$ のまわりに存在する状態と $\boldsymbol{x_2}$ のまわりに存在する状態の重ね合わせになっています。$|a| \gg b$ で、$\boldsymbol{x_1}$ と $\boldsymbol{x_2}$ がかなり離れている状況であっても、1 粒子目近傍に局在した状態と 2 粒子目近傍に局在した状態の重ね合わせになっており、量子力学の非局所相関や猫状態を彷彿とさせます。このように Efimov 状態は、非常に量子力学的な存在です。

3. Efimov 状態以外のチャンネルは斥力的で、Efimov チャンネルでのみ 3 体束縛状態は現れる。 実際、反結合性軌道のポテンシャルは斥力型で、遠方で

$$E_-(r) \approx -\frac{1}{2ma^2} + \frac{\exp(-r/a)}{mar} \quad (r \gg a, a > 0) \tag{131}$$

と振る舞います。この様子は式 (83) で引力（純虚数解）を生むチャンネルが 1 つで、それ以外が斥力的（実数解）であったことに対応しています。

4. Efimov 状態は有限散乱長では有限個しか現れない。 式 (129) の漸近的振る舞いは、前節で得た漸近形式 (94) などと定性的には全く同じで、r^{-2} の引力ポテンシャルが $r \lesssim |a|$ でのみ現れます。また、$a < 0$ の場合も、短距離では r^{-2} の引力が働き、$r = |a|$ で

$$E_+(r = |a|) = 0 \quad (a < 0) \tag{132}$$

となるので、やはり $r \lesssim |a|$ でのみ Efimov 効果が現れます[34]。従って、離散スケール不変性を持つ状態は、小さい方は $r \sim b$ から、大きい方は $r \sim |a|$ 程度まで存在します。最小と最大の Efimov 状態のサイズ比 $|a|/b$ の中に、$e^{\pi/|s|}$ 倍ずつ大きくなる状態がいくつ入るかを見積もると、Efimov 状態の数はおおよそ

$$\frac{|s|}{\pi} \log\left(\frac{|a|}{b}\right) \tag{133}$$

個になります。この式より、Efimov 状態をたくさん観測したいのであれば散乱長が大きい必要がある、という重要なポイントが理解できます。

5. Efimov 状態は $a < 0$ で 3 粒子に分解、$a > 0$ で 2 粒子束縛状態＋ 1 粒子に分解していく。 この挙動も、$a < 0$ で $E_+(r = |a|) = 0$ となり遠方でゼロエネルギーに漸近しそうだということ、そして $a > 0$ で $E_+(r) \to -1/2ma^2$ と 2 粒子束縛状態のエネルギーに漸近していくことから見て取れます。

6. Efimov 状態は 3 粒子のうちの 2 つの相互作用の散乱長が大きければ普遍的に現れる。また、Efimov 状態のスケール因子は、質量比に依存する。 Efimov 状態が初めて発見されたのは同種 3 粒子の系でしたが、この節では 2+1 粒子系でも Efimov 状態が現れることを見ました。また、上述の Efimov 状態の物理的な理解から、3 粒子系の 3 つの相互作用のうち 2 つ以上が大きな散乱長を持ち、1 つの粒子が他の粒子間の引力を媒介し結合性軌道を組めれば Efimov 状態が現れると期待されます。実際、異種粒子混合系についても hyper-spherical 方程式の方法で解析的に 3 体問題を解くと Efimov 状態が現れます。ただしそのスケール因子は式 (130) から分かるように、質量比に強く依存します。特に、質量比が非常に大きな「2 heavy + 1 light」の系だとスケール因子 $e^{\pi/|s|}$ が小さくなり Efimov 状態がたくさん見える可能性があります。このような系は Efimov favored な系と呼ばれます。反対に「1 heavy + 2 light」の系だとスケール因子 $e^{\pi/|s|}$ が大きくなりすぎて Efimov 状態がほとんど見えません。このような系は Efimov unfavored な系と呼ばれます。Hyper-spherical 方程式の方法で、解析的に 3 体問題を解いてそのスケール因子を様々な系で求め

[34] $a < 0$ での $r > |a|$ は Born-Oppenheimer 近似が成り立たない領域なので病的な振る舞いになります。$a > 0$ での $E_-(r)$ の $r < a$ のポテンシャルが図 13 で描かれていないのも、同様に Born-Oppenheimer 近似が成立しない領域だからです。

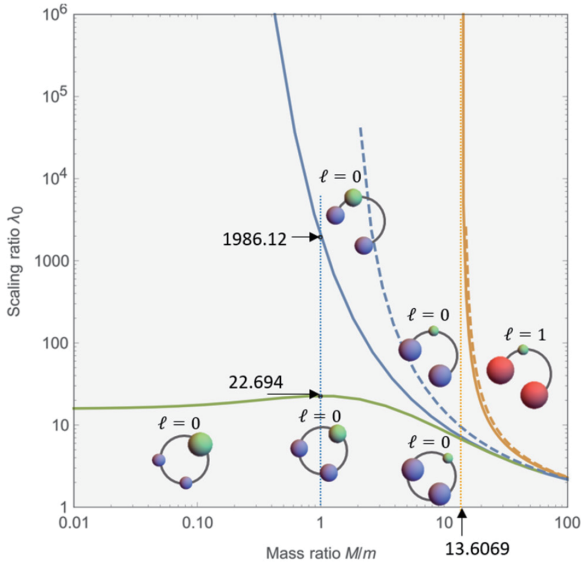


図 14: Efimov 状態のスケール因子 $e^{\pi/|s|}$ の質量比依存性（[15] より引用）。実線は hyper-spherical 方程式により得られた解析解で、破線は Born-Oppenheimer 近似により得られたもの。緑線は 3 粒子全ての間の相互作用の散乱長が発散的に大きな系。青線は 2 つの相互作用の散乱長が発散的に大きな系。橙線は角運動量 $J = 1^-$ の場合で、フェルミ粒子系に対応する。

たものを図 14 に示します。スケール因子が質量比に依存して変化していく様子が見て取れます。また 3 つの粒子がすべて大きな散乱長で相互作用しているほうが、2+1 粒子系に比べてスケール因子が小さくなり、Efimov 状態がより見やすいことも、質量比 1 でのスケール因子 22.7 と 1986 を比較すると分かります。さらに上記の Born-Oppenheimer 近似 (破線) が大きな質量比領域でのみ良く成立する様子もこの図から見て取れます。

7. フェルミ粒子系でも Efimov 状態は現れる。ただし質量比が非常に大きな系でのみ。 これまでは主にボース粒子を考えてきました。ではフェルミ粒子の場合はどうなるでしょう？特に $\boldsymbol{x_1}$ と $\boldsymbol{x_2}$ が内部状態の同じフェルミ粒子 (i.e. スピン偏極している) とすると、それらの間の波動関数は反対称化しなければなりません。従って $r = |\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}|$ の相対運動の角運動量は $L = 1, 3, 5, 7...$ のみが許され、式 (128) は

$$\left[-\frac{1}{M}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{L(L+1)}{Mr^2} + E_{\pm}(r)\right]\psi(r) = E\psi(r) \tag{134}$$

となります。特に、$r \ll |a|$ においては式 (129) を用いて

$$\left[-\frac{1}{M}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{s^2 - \frac{1}{4}}{Mr^2}\right]\psi(r) = E\psi(r) \tag{135}$$

$$s^2 = L(L+1) + \frac{1}{4} - \frac{M}{2m}\Omega^2 \tag{136}$$

となります。つまりこのフェルミ系においては角運動量ポテンシャルによる斥力と Efimov 効果による引力が競合しています。その相対的な強さを決めるのが質量比です。質量比 M/m が小さ

な系では角運動量ポテンシャルによる斥力が強く Efimov 状態は生じません。しかし質量比が

$$\frac{M}{m} \geq \left(\frac{M}{m}\right)_E = \frac{2}{\Omega^2}\left[L(L+1)+\frac{1}{4}\right] = 13.992\ldots \quad (L=1) \tag{137}$$

を超えたときに Efimov 引力が角運動量ポテンシャルに打ち勝って Efimov 状態が現れます。この臨界質量比は Born-Oppenheimer 近似で求められたものですが、hyper-spherical 方程式の方法で厳密に求めると 13.6069... となります [3, 66]。両者は良く一致しており、Born-Oppenheimer 近似が非常に良い近似になっていることが見て取れます。図 14 の橙線（フェルミ粒子系、$J = 1^-$）を見ても、質量比が大きな領域で Born-Oppenheimer 近似（破線）と厳密解（実線）が良く一致していることが分かります。

このフェルミ粒子系の議論から、Efimov 状態を見るには排他律が働かない系の方が良い、ということが分かります。また、上記の議論で角運動量ポテンシャルが $1/M$ に、Efimov 引力が $1/m$ に依存して競合した様子は、実は一般の Efimov 状態についても起こっています。すなわち、運動項のゼロ点エネルギーによる斥力と Efimov 引力が常に競合しています。その競合の結果、Efimov 状態が現れるのです。図 14 でスケール因子が質量比に強く依存するのも、運動項のゼロ点エネルギーによる斥力と Efimov 引力の相対的な強さが質量比を変えることで変化するためなのです。

4.2 繰り込み群

Efimov 状態の離散スケール不変性は、繰り込み群の手法でも理解でき、リミットサイクル解に相当します。Wilson は繰り込み群を提唱した論文 [67, 68] で、繰り込み群のフローには安定・不安定な fixed point 解のほかに、リミットサイクル解が存在しうることを指摘していました[35]。この節ではこのことを解説します。詳細な計算は [12] に任せて、ここでは Skorniakov–Ter-Martirosian 方程式を用いた簡便な導出のみを行います。Sec. 3.2 では 2 体の分離型ポテンシャルが存在する場合を考えましたが、3 体の分離型ポテンシャル

$$V = g_3|\phi_3\rangle\langle\phi_3| \tag{138}$$

も存在する場合に Skorniakov–Ter-Martirosian 方程式がどのように変更されるかを考えましょう。ここで ϕ_3 としては、最も単純なステップ関数型

$$\langle \boldsymbol{p_3}, \boldsymbol{P_3}|\phi_3\rangle = \begin{cases} 1 & (|\boldsymbol{p_3}|, |\boldsymbol{P_3}| < \Lambda) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{139}$$

を考えます。すると、式 (97) の左辺に

$$+mg_3 \int \frac{d^3\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3}\frac{d^3\boldsymbol{P}}{(2\pi)^3}\Psi(\boldsymbol{q},\boldsymbol{P}) \tag{140}$$

の項が加わり、式 (103) の右辺には

$$-\frac{\overline{g_3}}{p_3^2 + \frac{3}{4}P_3^2 - mE + i0} \tag{141}$$

[35]Wilson がこの論文を発表した 1971 年が Efimov 状態の発見とほぼ同じ時期であることも興味深い。

の項が加わります。ここで

$$\overline{g_3} \equiv m g_3 \int \frac{d^3\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3}\frac{d^3\boldsymbol{P}}{(2\pi)^3}\Psi(\boldsymbol{q},\boldsymbol{P}) = \frac{g_3}{g}\int \frac{d^3\boldsymbol{P}}{(2\pi)^3}F(\boldsymbol{P}) \tag{142}$$

です。以下、Sec. 3.2 と同様に計算を進めると、

$$\left[\frac{1}{a} - \sqrt{\frac{3}{4}P_3^2 - mE}\right]F(P_3) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\Lambda dP_1 \frac{P_1}{P_3}\log\left(\frac{P_3^2+P_1^2+P_1P_3-mE}{P_3^2+P_1^2-P_1P_3-mE}\right)F(P_1) + \frac{2\overline{g_3}}{\pi}\int_0^\Lambda \frac{q^2dq}{q^2+\frac{3}{4}P_3^2-mE} \tag{143}$$

を得ます。この式の両辺を Λ で微分し、3 体の結合定数 g_3 が Λ にどのように依存するかを見てみましょう。Λ が大きく、E が小さいときには最終項の積分は

$$\int_0^\Lambda \frac{q^2dq}{q^2+\frac{3}{4}P_3^2-mE} \approx \int_0^\Lambda \frac{q^2dq}{q^2} = \Lambda \tag{144}$$

と近似でき、

$$\frac{d}{d\Lambda}(\Lambda\overline{g_3}(\Lambda)) = \left[\frac{P_1}{P_3}\log\left(\frac{P_3^2+P_1^2+P_1P_3-mE}{P_3^2+P_1^2-P_1P_3-mE}\right)F(P_1)\right]_{P_1=\Lambda} \tag{145}$$

となります。ここで右辺も $\Lambda\to\infty$ では

$$\frac{\Lambda}{P_3}\log\left(\frac{P_3^2+\Lambda^2+\Lambda P_3-mE}{P_3^2+\Lambda^2-\Lambda P_3-mE}\right)F(\Lambda) = \frac{\Lambda}{P_3}\log\left(\frac{1+P_3/\Lambda+...}{1-P_3/\Lambda+...}\right)F(\Lambda) \approx 2F(\Lambda) \tag{146}$$

と良く近似できます。これに、式 (116) で $s = i|s_0|$ としたものを代入すると

$$\frac{d}{d\Lambda}(\Lambda\overline{g_3}(\Lambda)) = 2\Lambda^{\pm i|s_0|-2} \tag{147}$$

となります。この繰り込み群方程式の右辺は $\log\Lambda$ について周期的に振動し、リミットサイクルのように振る舞うことが見て取れます。実際、この微分方程式を解くと

$$\overline{g_3}(\Lambda) = \frac{2}{\pm i|s_0|-1}\Lambda^{\pm i|s_0|-2} \tag{148}$$

となり、特に、$\overline{g_3}$ が実数になるように $\pm$ の解をうまく足し合わせ、$\overline{g_3}(\Lambda^*) = 1$ となる適当な運動量スケール Λ^* を用いると、

$$\overline{g_3}(\Lambda) = -\frac{1+|s_0|^2}{2}\left[\frac{1}{i|s_0|-1}\left(\frac{\Lambda}{\Lambda^*}\right)^{i|s_0|-2} + \frac{1}{-i|s_0|-1}\left(\frac{\Lambda}{\Lambda^*}\right)^{-i|s_0|-2}\right] \propto \frac{1}{\Lambda^2}\cos\left[|s_0|\log\frac{\Lambda}{\Lambda^*} + \Delta(s_0)\right] \tag{149}$$

のように表せます。これより、3 体の結合定数 $\overline{g_3}$ が、運動量スケール Λ を変えるにつれて周期的に振動・回帰する、というリミットサイクル的な挙動を示すことが分かります。

Fixed point 解に比べて、繰り込み群のリミットサイクル解は非常に稀であり、Efimov 状態 (とそれに関連する現象) は、人類がこれまで自然界で観測できた唯一の量子系におけるリミットサイクル解です[36]。

[36] 量子系がリミットサイクルを示す数理的なモデルは [69, 70, 71] などに提唱されています。また古典系では Belousov-Zhabotinsky 反応など、リミットサイクル的な挙動を示す系が多く知られています。

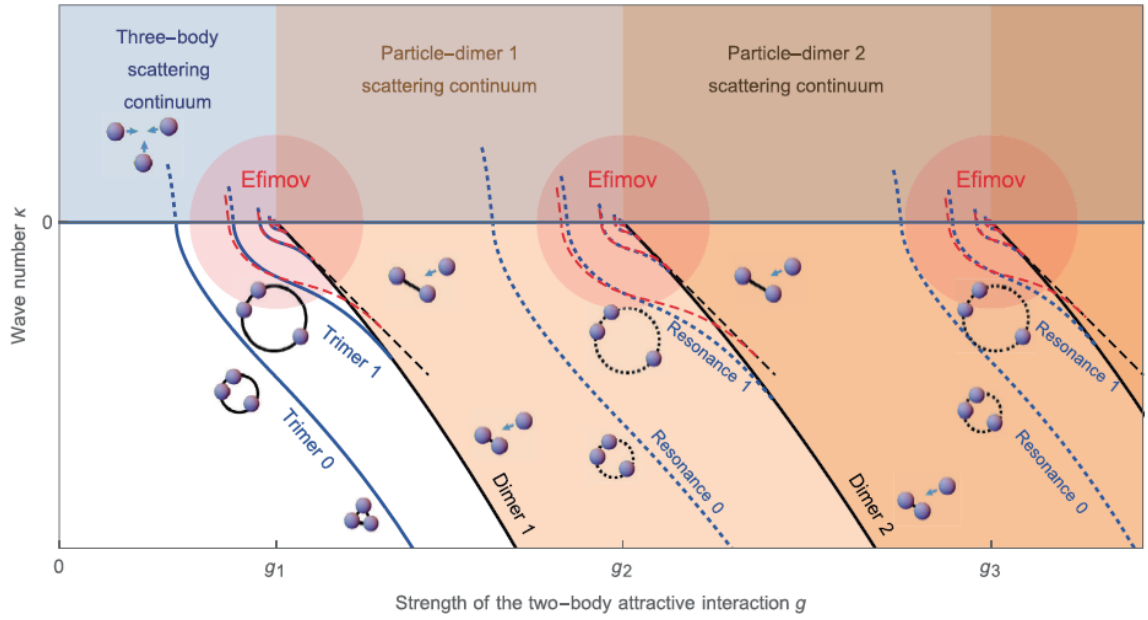


図 15: 引力のモデルポテンシャル $gV(r)$ で 3 体問題を解いた時のエネルギースペクトルの挙動の概念図 ([15] より引用)。ゼロレンジ理論による Efimov 状態のスペクトル (赤破線) とモデルポテンシャルの 3 体束縛状態 (青実線) と 3 体共鳴状態 (青破線)。2 体束縛状態については、モデルポテンシャルにおける束縛エネルギー（黒実線）とゼロレンジ理論による式 (17)(黒破線) を示す。

4.3 Finite-range effects と現実的なモデルポテンシャルにおける Efimov 状態の挙動

これまでは、理想的な $1/a = 0, E \to 0$ 付近での Efimov 状態の性質を議論しましたが、現実の系では散乱長もエネルギーも有限です。そのため、ゼロレンジ理論で求めた Efimov 状態の性質から幾分ずれが生じます。これを有限レンジ効果 (Finite-range effects) と呼びます。図 15 に、引力型の有限レンジポテンシャルを次第に深くしていった時の、2 粒子・3 粒子系のエネルギースペクトルの挙動を示します。1 つ目の 2 体束縛状態 (Dimer 1) が現れ、散乱長が発散的に大きくなる領域で 3 粒子束縛状態が無限個現れます。その高励起状態はゼロレンジ理論によるスペクトル形状 (赤破線) と非常に良く一致するのですが、基底状態 (Trimer 0) と第一励起状態 (Trimer 1) についてはずれが見えます。特に基底状態 (Trimer 0) については赤破線は描いていませんが、ずれがかなり大きいです。実際、引力ポテンシャルでは、3 粒子束縛状態の基底状態のエネルギーが 2 粒子の基底状態のエネルギー (Dimer 1) よりも低いという定理があるため [72, 73, 74]、3 粒子束縛状態の基底状態 (Trimer 0) は dimer+particle には分解しません。第一励起状態 (Trimer 1) については、広い散乱長領域でゼロレンジ理論と良く一致するのですが、散乱長が正の側、特に 3 粒子が dimer+particle に分解するとゼロレンジ理論で予言される a_* あたりでずれが大きくなります。実際、原子の van der Waals 相互作用を取り入れた 3 体計算でも、第一励起状態では a_* がぎりぎり現れない[37] ことが分かっています [39, 75]。

2 つ目、3 つ目の 2 粒子束縛状態が現れる近傍の領域 (i.e. Dimer 2, Dimer 3 の束縛エネルギー

[37] 3 体束縛状態は dimer+atom に分解はしませんが、かなり接近するため、atom-dimer 散乱の増大が現れます。それが冷却原子の実験で a_* として観測されています。

が 0 に漸近する領域) についても Efimov 状態は現れます。しかし、図 15 に破線で “Resonance 0”, “Resonance 1” などと示される通り、共鳴状態として現れます。これは、Efimov 状態が 1 つ目の 2 粒子束縛状態 (Dimer 1)+1 粒子などの連続状態の中に埋もれており、それらの状態へ崩壊できるため、有限の寿命を持つからです。一般に、この寿命は比較的長く、共鳴状態としての幅は小さいです。というのは、Efimov 状態は空間的に非常に広がっており、強く束縛された 2 粒子束縛状態+1 粒子との重なり積分が小さいからです。これが、ポテンシャルが深く、崩壊 (decay) チャンネルが多数存在する冷却原子の系でも、Efimov 状態が明瞭に観測できる理由です。

散乱長を負の側に変化させていくと (g を小さくしていくと)、Efimov 状態は 3 粒子に分解した後、共鳴状態になります。この様子も図 15 に青破線として示してあります。これは式 (95) や式 (132) からも分かるように、$a < 0$ では遠方のポテンシャルが斥力的であるためです。この斥力は運動項のゼロ点エネルギーに由来しています。冷却原子の実験は、低温とはいえ有限のエネルギーで行われますが、それでも Efimov 状態が明瞭に観測されるのは、このように $E > 0$ でバーチャル状態ではなく共鳴状態になるおかげです。一方、散乱長が正の側では、Efimov 状態が dimer+particle に分解した後はバーチャル状態になります。

5　物理系における Efimov 現象の観測・予言

この節では、Efimov 状態が様々な物理系でどのように観測・予言されているかを、それぞれ紹介していきます。

5.1　冷却原子気体

ロスレートによる Efimov 状態の観測　最も明瞭に Efimov 状態が観測されているのが冷却原子です。散乱長を自在に制御することを可能にする Feshbach 共鳴が 1998 年に観測されると、その直後に、散乱長の大きなボース原子気体を用意し、気体中の原子数の時間変化を測定することで Efimov 状態の兆候を捉えられる、という理論提案がなされました [76, 77]。その手法は次の通りです：冷却原子気体の実験では、レーザー等により原子を真空チャンバーの中央付近に捕捉しますが、時間が経つにつれて、その原子数は徐々に減少していきます。原子数密度 n の時間変化を記述するレート方程式は

$$\frac{dn}{dt} = -L_1 n - L_2 n^2 - L_3 n^3 \tag{150}$$

です。ここで L_1, L_2, L_3 はそれぞれ 1 体・2 体・3 体ロスレートと呼ばれる量です。1 体ロスレートは外部からの擾乱等により原子がトラップから飛び出していくレートを記述する量です。一方、2 体・3 体のロスレートは原子 2 つ・3 つが非弾性衝突してトラップから飛び出していくレートを表します。原子気体で非弾性衝突が起こった場合は、eV スケールの原子・分子の内部エネルギーが解放されて、原子・分子の運動エネルギーに変換されるのですが、そのエネルギースケールはレーザー等による捕捉ポテンシャルの強さより遥かに大きいため、通常は非弾性衝突が生じたとたんに、その原子たちはレーザー捕捉の外へと吹き飛んでいき、原子気体から失われてしまいます[38]。この L_3 に Efimov 状態の兆候が現れます。というのは、Efimov 状態という 3 粒子束縛

[38] 非弾性衝突の結果生じた分子をイオントラップを用いて捕捉する実験も報告されています [78]。

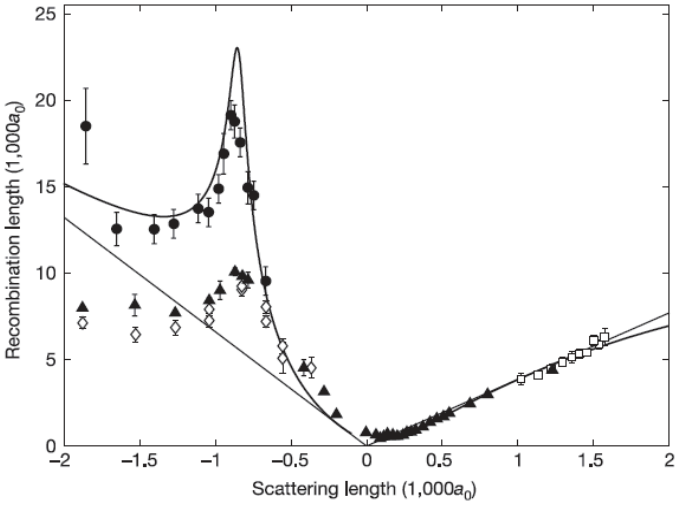


図 16: Recombination length $\rho \propto L_3^{1/4}$ の散乱長依存性の測定による Efimov 状態の観測 ([2] より引用)。$a_0 = 0.52... \times 10^{-10}$ m は原子単位。黒丸は低温 $T \approx 10$ nK でのデータ。その他の記号はより高温（$T \approx 200$–450 nK）でのデータ。太実線はゼロレンジ理論による理論曲線 [12, 77]、細実線は $L_3 \propto a^4$ というスケーリング曲線。

状態が形成されると、3 原子が衝突する断面積が増大し、その結果ロスレートが増大するからです。実際、負の散乱長側では図 12 の a_- 付近 (Efimov 状態が 3 原子に分解する threshold 近傍) で、L_3 がピーク的に増大することが図 16 の実線のように理論的に示されました。そしてそのピークが 22.7 という Efimov 状態のスケール因子で周期的に続いていきます。正の散乱長でも、L_3 に Efimov 状態特有の 22.7 を周期とする振動が現れます (図 17 の実線参照)。散乱長が負の領域と異なりピーク構造は現れず、のっぺりした山とディップが周期的に現れます。これは、$a > 0$ ではエネルギー $-1/ma^2$ の 2 体束縛状態が存在し、次の 2 つの反応過程が量子干渉を起こすためです：(i)3 原子 ⇒ エネルギー $-1/ma^2$ の 2 原子束縛状態＋ 1 原子　⇒ エネルギー $-1/mr_{\rm vdw}^2$ の 2 原子束縛状態＋ 1 原子 (ii) 3 原子 ⇒ エネルギー $-1/mr_{\rm vdw}^2$ の 2 原子束縛状態＋ 1 原子。

3 体ロスレート L_3 に現れるこれらの特徴的なピークやディップを最初に観測したのがインスブルック大学の Grimm のグループです [2]。Cs 原子の Feshbach 共鳴を用いて散乱長を変化させながら L_3 を測定し、図 16 のように $a < 0$ で明瞭なピーク、$a > 0$ でディップのようなものを観測しました。当時の理論では、ピークやディップの位置 a_-、a_+ そのものを予言することはできませんでしたが、その比 $|a_+/a_-|$ は予言できました。ゼロレンジ理論で予言された $|a_+/a_-| = 0.96$[12] と良く一致する値 $|a_+/a_-| = 1.25(9)$ が、この観測により得られました[39]。

この初期の実験では、理論の予言と整合する L_3 の振る舞いが見られた一方で、「22.7」という Efimov 状態特有の離散スケール不変性の観測はできませんでした。その観測には、より大きな散乱長を安定に実現できる実験を待つ必要がありました。そのような実験が報告されたのが 2009 年です。アメリカ・イスラエル・イタリアの 3 つのグループが独立に、Cs とは異なる原子 (Li と K 原子) に対して L_3 を測定しました [7, 8, 9]。その結果、Grimm のグループの実験と同様のピー

[39] この実験の a_- は基底 Efimov 状態のもので、a_+ は第一励起 Efimov 状態のものです。基底 Efimov 状態は $a > 0$ で有限レンジ効果を強く受けるため、ディップ構造 a_+ などは生じません。

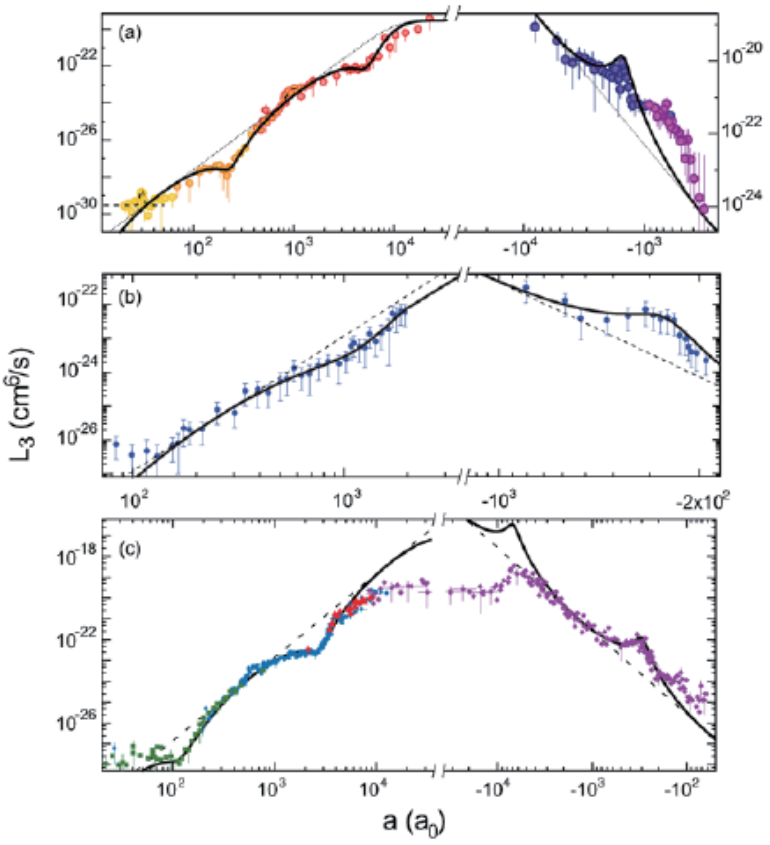


図 17: Efimov 状態のロスレート L_3 による観測 ([14] より引用)。(a) イタリア (^{39}K 原子)[7]、(b) イスラエル (^{7}Li 原子)[8]、(c) アメリカ (^{7}Li 原子)[9] のグループの実験データがそれぞれ示されている。実線はゼロレンジ理論による理論曲線 [12]。点線は $L_3 \propto a^4$ というスケーリング曲線。

ク構造とディップ構造がより明瞭に観測されました (図 17)。特に $a > 0$ の領域で周期的な振動 1 周期分が観測され (図 17(a) と (c))、その観測された周期 22 ± 4 が Efimov 状態の「22.7」と一致し、Efimov 状態の離散スケール不変性が歴史上はじめて実測されました。

これらの実験は一見非常に美しい Efimov 状態の観測なのですが、注意が必要なことがあります。それは、「原子がいなくなった」ことを表す L_3 を通して Efimov 状態を観測している点です。観測の途中で電磁場ノイズや振動などが偶然加わってロスレートが増大すると、L_3 にピークが現れてしまいます。その位置がたまたま Efimov 理論により予言される散乱長と一致すると、Efimov 現象によるロスレートの増大と誤って解釈してしまう可能性もあります。実際、そのようなことが図 17(a) で起こっています。図 17(a) の $a < 0$ 側にはピークが 2 つ見え、当初は左のピークが Efimov 状態のピーク、右のピークは Efimov 状態に付随した 4 体束縛状態のピーク (Sec. 6.1 参照) と解釈されていましたが、後の再実験で左側のピークは観測されず、右のピークのみが見えることが分かりました [40]。実は右の方のピークが Efimov 状態による L_3 ピークだったのです。また、散乱長が大きい領域では、Feshbach 共鳴の散乱長と磁場の関係式がわずかに修正されるだけで、理論曲線と実験データの比較が大きく変わってしまう、という点にも注意が必要です。実際、そのようなことが図 17(c) で起こっています。図 17(c) では $a < 0$ の側にピークが 2 つあり、それら

が理論曲線による 22.7 の周期と良く一致しているように見えます。しかし、Feshbach 共鳴の散乱長と磁場の関係式を改善した後の再実験では、$a < 0$ の 2 つ目のピークは見えていないことが分かりました [31]。$a < 0$ 側の 2 つ目のピークは、2014 年に Grimm らのグループによって最終的に明瞭に観測され、その周期は 21.0 ± 1.3 と求められました [79]。このように、一流誌に掲載された結果が数年後に「やっぱり見えませんでした。ごめん。」となることもしばしばあるため、ロスレートによる Efimov 状態の観測やその理論的な吟味をする際にはかなりの注意が必要です。

冷却原子で Efimov 状態は何個 (何周期) 観測可能か？　これらの実験では 2 個の Efimov 状態、すなわち 1 周期分が観測されました。しかし、2 個目（第一励起 Efimov 状態）を観測すること自体が、すでに非常に困難です。第一励起 Efimov 状態のサイズは $\langle r \rangle = 1\ \mu$m 程度もあり、これを観測するには、熱的ドブロイ長と平均粒子間隔がともにこのサイズより大きくなるまで、気体を極低温かつ希薄にする必要があるからです。さらに第二励起 Efimov 状態を観測しようとすると、そのサイズは $\langle r \rangle = 20\ \mu$m にもなるため、温度をさらに 500 倍も下げ、平均粒子間隔が 20 倍以上大きな冷却原子気体を実現しなくてはなりません。そのため、同種ボソン系では現在までに、Efimov 状態は 2 個（1 周期分）しか観測されていません。

一方、前節で紹介した通り、質量比が非常に大きな系では Efimov 状態のスケール因子は非常に小さくなります。そのことを利用して Efimov 状態を 3 個 (2 周期分) 観測した実験があります [80, 81]。用いたのは Cs 原子と Li 原子の混合冷却原子気体です。Cs 原子と Li 原子の質量比は 22 と非常に大きいため、Cs-Cs-Li の Efimov 状態のスケール因子は 4.88 と非常に小さくなります。実際に、Cs-Li 混合原子気体で 3 体ロスレートを測定し、$a < 0$ の領域で Efimov 状態を 3 個観測することに成功しました。ピークの位置の比は、それぞれのグループで $|a_-^{(1)}/a_-^{(0)}| = 5.1 \pm 0.2$, $|a_-^{(2)}/a_-^{(1)}| = 4.8 \pm 0.7$[80] と、$|a_-^{(1)}/a_-^{(0)}| = 5.07 \pm 0.15$, $|a_-^{(2)}/a_-^{(1)}| = 4.0 \pm 0.3$[81, 82] と報告され、ゼロレンジ理論による予言 4.88 と比較的良く一致しています。エラーバーよりも幾分外れているように見えるのは、有限レンジ補正、Cs-Cs 原子間の相互作用、有限温度などの効果によるものだと考えられています [82, 83]。

Efimov 状態の直接観測　上記の実験によって Efimov 状態の離散スケール不変性は明確に検証されましたが、その最大の短所は「原子がいなくなった」ことを見る間接測定であることです。Efimov 状態を直接合成・観測しようという試みも、冷却原子の実験で行われています。散乱長が正の側において、エネルギー $-1/ma^2$ の 2 体束縛状態と原子の混合気体を用意します。そして電磁場を与えることで、この dimer+particle 状態を Efimov 状態へと遷移させます。与えている電磁場の周波数が dimer+particle の threshold と Efimov 状態のエネルギーの差にちょうど一致したときに吸収のピークが現れ、Efimov 状態の直接合成とそのエネルギーの直接測定ができます。^{6}Li 原子気体を用いてそのような実験が、ドイツと日本のグループで行われました [84, 85]。また、3 つの原子から直接 Efimov 状態を合成する実験にも成功しています [86]。ただし、これらの実験で直接合成された Efimov 状態は、すぐに $-1/mr_{\mathrm{vdw}}^2$ の 2 原子束縛状態＋1 原子へと崩壊し、原子気体のレーザー等によるトラップから飛び出して失われてしまいます。

5.2 ^{4}He 原子クラスター

上記の冷却原子では、散乱長を自在に変化させながら実験ができる反面、Efimov 状態が不安定で、形成後すぐに失われてしまうという欠点があります。これに対して、Efimov 状態を安定に実現できる系が ^{4}He 原子です。^{4}He 原子は Sec. 2.6 で紹介した通り、原子間の散乱長が非常に大きい稀有な系です。そのため、^{4}He 原子 3 つの 3 体問題を考えると、Efimov 状態としての 3 粒子束縛状態が現れるだろうと、1970 年代から指摘されていました [5]。^{4}He 原子間の現実的なポテンシャルを用いて量子 3 体問題を正確に解くと、3 粒子状態が 2 つ、安定な束縛状態として (i.e. 2 粒子束縛状態の threshold より下に) 現れます。その基底状態は有限レンジ効果を強く受けるため、ゼロレンジ理論の Efimov 状態とは異なる形状・性質を持っていますが、励起状態の方はエネルギースペクトルの形や波動関数の形状がゼロレンジ理論と非常に良く一致します。このことから、^{4}He 原子の 3 粒子束縛状態のうちの第一励起状態は明確に Efimov 状態であると考えられてきました。

2015 年にその Efimov 状態の観測に初めて成功したのがドイツのグループです [10]。この実験では、原子波回折と Coulomb explosion という 2 つの手法が組み合わされています。まず ^{4}He 原子をノズルから噴出することで、1 原子状態、2 原子束縛状態、3 原子束縛状態などさまざまな状態が混ざった原子ビームを用意します。それを回折格子に当てて回折させることで、質量の異なる原子、2 原子、3 原子クラスター状態をそれぞれ分離します。このような実験は 1990 年代から行われ、それにより既に 2 原子束縛状態、3 原子束縛状態やそのおおよそのサイズが観測されていました [87]。しかし 3 原子状態で観測されていたのは基底状態のみで、励起状態は観測できていませんでした。2015 年の実験では、さらに Coulomb explosion という手法を用いることで、Efimov 状態である励起状態の方の 3 原子束縛状態を観測することに成功しました [10]。Coulomb explosion では、短パルスレーザーや自由電子レーザーなどの強い光を原子に当てて瞬間的に原子から電子を取り去ることで、3 原子束縛状態を 3 つの正イオンに変えます。すると正イオン同士が Coulomb 反発により、あたかも爆発するかのように吹き飛びます。飛び去ったイオンの速度をすべて測定することで、運動エネルギーとして解放された Coulomb エネルギーの和 $E_{KER} = e^2/r_{12} + e^2/r_{23} + e^2/r_{31}$ が求まります[40]。ここで r_{ij} は初期状態での原子間の距離です。この E_{KER} の分布を測定したものが図 18(A) です。3 粒子束縛状態の基底状態からの寄与と励起状態からの寄与が明瞭に分かれて観測されています。

この E_{KER} の分布は、初期の波動関数の確率密度分布の情報を反映しているため、これから波動関数を再構成できます。このようにして観測により得られた励起 trimer 状態の波動関数の形状が図 18(C) に示されています。これは、理論で得られた励起状態の確率密度分布 (図 18(B)) と非常に良く一致しています。この確率密度分布は、まさに前節で議論したゼロレンジ理論における Efimov 状態の波動関数の特徴と一致しています。すなわち、1 つの原子が他の 2 つの原子の間で結合性軌道を形成し、細長い三角形のような形状をしているのです。このことからも、3 体束縛状態の励起状態は Efimov 状態と言えます。一方、3 体束縛状態の基底状態の波動関数が図 18(D) に示されています。この波動関数は先ほどのものと異なり正三角形のような形状をしています。このことから、^{4}He 原子 3 体系の基底状態は、Efimov 状態とは言い難いことが分かります。

[40] 3 原子の束縛エネルギーや初期状態の運動エネルギーは $\lesssim$100 mK 程度で、Coulomb 相互作用エネルギー ~1-10 eV に比べてはるかに小さく、無視できる。これが Coulomb explosion により r_{ij} の分布を求めて、確率密度分布を再構成できる理由でもある。

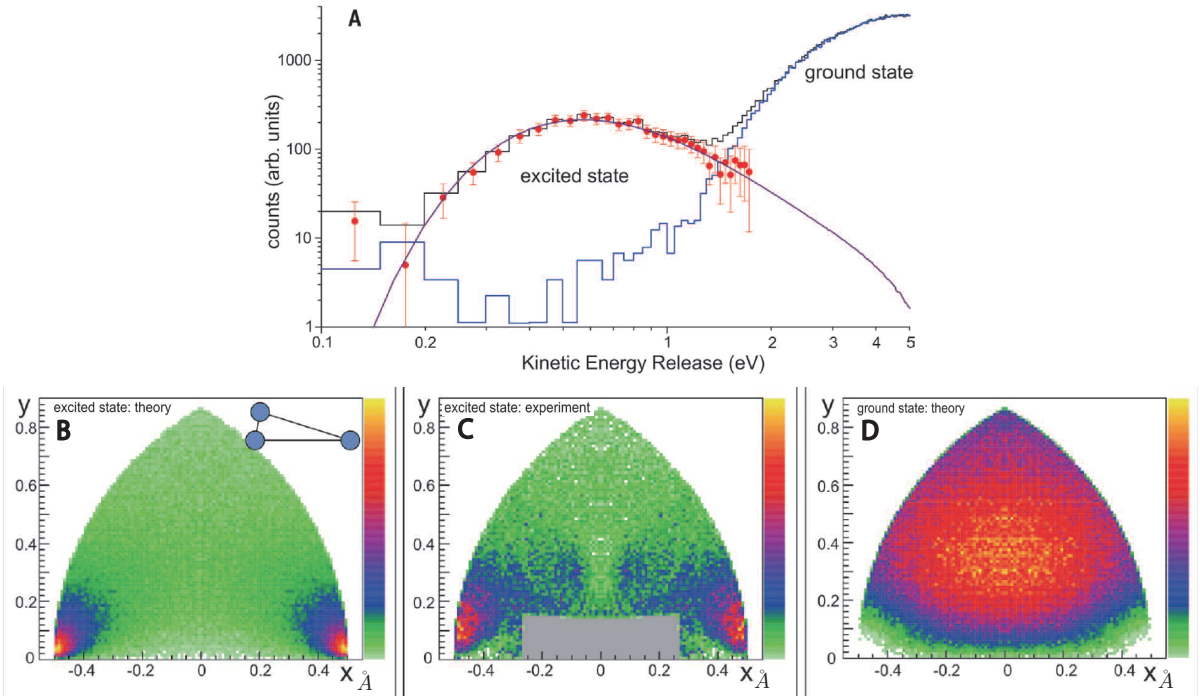


図 18: ^{4}He 原子クラスターにおける Efimov 状態の観測 ([10] より引用)。(A) 原子をイオン化させた際の Coulomb explosion 現象により観測された kinetic energy release $E_{KER} = e^2/r_{12} + e^2/r_{23} + e^2/r_{31}$ の分布。^{4}He 原子の圧力が高く、基底 trimer 状態のみからなる場合 (青) と、低圧で基底 trimer・励起 trimer 状態の混合になっている場合 (黒) のデータを実験で得て、その差分から励起 trimer 状態由来の E_{KER}（赤丸）が得られた。紫実線は励起 trimer 状態の E_{KER} の理論計算。(C)E_{KER} のデータから得られた励起 trimer 状態の波動関数。1 つ目と 2 つ目の粒子を $(x, y) = (-0.5, 0)$ と $(0.5, 0)$ の位置に固定した際の 3 つ目の粒子の確率密度分布を示す。(B) と (D) は理論計算により得られた、励起 trimer と基底 trimer の確率密度分布。

Coulomb explosion による Efimov 状態の観測は、冷却原子と比べると、散乱長を変えられないため 22.7 というスケール因子は確認できませんが、(i)Efimov 状態が安定な 3 体束縛状態として存在する、(ii) 波動関数の確率密度分布の直接観測が可能という 2 つの大きな利点があります。また、この技術を用いた ^{4}He 原子系の精密観測も進んでいます [49]。3 体系ではなく 2 体系に対して Coulomb explosion で $E_{KER} = e^2/r_{12}$ を測定することで、^{4}He 原子 2 体系の波動関数を精密に直接観測できるようになり、QED 補正 [88] などの効果まで実験で検証できるようになっています。

5.3 三重水素 ^{3}H 核

Efimov 自身が 1970 年の論文で Efimov 状態が現れる可能性を議論した系の 1 つが三重水素 ^{3}H 核です。Sec. 2.6 で議論したように陽子・中性子間の s 波散乱長はかなり大きいので、陽子 1 つと中性子 2 つからなる 3 体系を考えると、Efimov 状態が現れる可能性があります。Efimov 状態の数を式 (133) を用いて見積もってみると、1 つくらい Efimov 状態が現れることが分かります。実際に陽子 1 つと中性子 2 つの 3 体問題を解くと、束縛状態が 1 つだけ存在し、これが三重水素

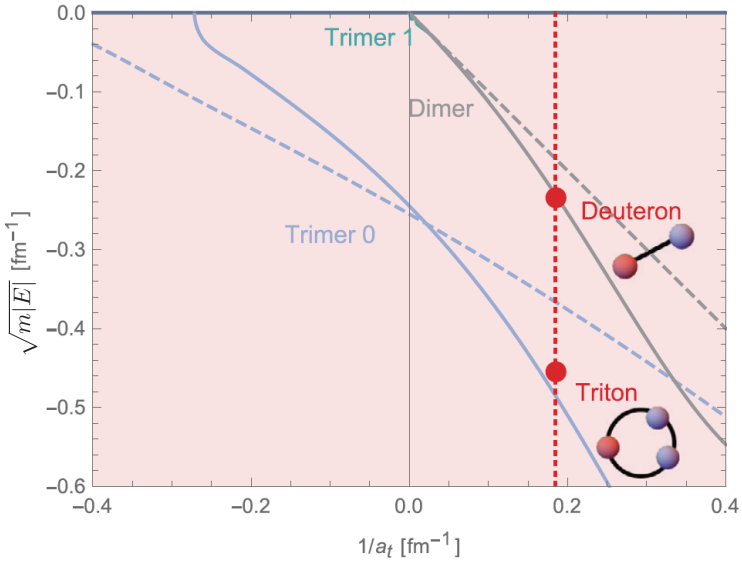


図 19: 陽子・中性子間のスピン・トリプレット $S = 1$ 状態の s 波散乱長 a_t を変化させた際の、陽子 1 つと中性子 2 つの 3 体系の束縛エネルギー（[15] より引用）。ゼロレンジ理論（破線）および有限レンジ補正を取り込んだ理論計算（実線）により得られた 2 体（黒）・3 体（青）束縛状態のエネルギー。中性子間の散乱長 a_s は実験値 $a_s = -23.7148(43)$ fm に固定。重陽子の束縛エネルギー (赤丸 “Deuteron”) を再現するように陽子・中性子間の s 波散乱長 a_t を設定した際（赤点線）の三重水素核の束縛エネルギーを赤丸 “Triton” で示す。a_t が非常に大きい領域で励起 trimer 状態（緑線。“Trimer 1” と表記）も出現し、基底 trimer 状態 (“Trimer 0” と表記) と Efimov 理論によるスケール不変性で関係づけられる。

^{3}H の基底状態になっています。この状態を Efimov 状態と呼べるかどうかは微妙です。というのは、束縛状態が 1 つしかないため「22.7 倍」という Efimov 状態のスケーリング則の検証はできず、また冷却原子のように散乱長を実験で人工的に変化させることもできないからです。さらに Sec. 4.3 で議論した通り、基底状態は有限レンジ効果を強く受け、ゼロレンジ理論による Efimov 状態とは大きく異なる振る舞いをします。これらの理由により、三重水素 ^{3}H は理想的な意味での Efimov 状態ではない、と言えます。

一方、より広い意味で Efimov 状態と見なすこともできます。原子核系では、実験で散乱長を人工的に変えることはできませんが、理論計算の中で核子間相互作用を変えて核子間散乱長を変化させたときに、エネルギースペクトルがどのように振る舞うかを調べることはできます。現実的な核子間散乱長の値では 3 粒子束縛状態は 1 つしか存在しませんが、核子間散乱長が無限になるユニタリー極限近傍で数多くの 3 粒子束縛状態が現れ、それらが「22.7 倍」のスケーリング則に従う Efimov 状態であることが示せます。核子間散乱長をユニタリー極限から現実的な核子間散乱長の値に徐々に変化させていくと、Efimov 状態のうち基底状態であったものが三重水素 ^{3}H の基底状態に連続的に移行していくことが示せます。このような意味で三重水素 ^{3}H の基底状態も Efimov 状態と密接に関わっているといえます。

図 19 に陽子・中性子間の散乱長[41]を変化させながら、陽子・中性子の 3 体問題を理論的に解いて得られたエネルギースペクトルを示します。きれいな「22.7 倍」のスケーリング則が成立する理想的な Efimov 状態を記述するゼロレンジ理論 (破線) は三重水素 ^{3}H の束縛エネルギーを全く再現できない一方、有限レンジ補正を加えた理論 (実線) は比較的良く再現していることが見て取れます。さらに、この基底状態は図 19 のユニタリー極限付近で現れている励起状態と離散スケール不変性で関係づけられます。このように、三重水素核は理想的な Efimov 状態ではないのですが、「有限レンジ補正まで考慮した Efimov 状態の普遍的な挙動に従うという意味で Efimov 状態だ」と言えます。

ただし最近の研究で、原子核系における Efimov 状態は、冷却原子で観測されている基底 Efimov 状態とは定量的に異なるユニバーサリティを示しうることが分かってきました。特に三重水素については、陽子・中性子間の引力相互作用が弱すぎるため、冷却原子と同じ意味でのユニバーサリティは示さないことも指摘されています [53, 89]。有限レンジ効果が強く効く場合の Efimov 状態については現在も様々な研究が進められており、その理解が進むことで、三重水素 ^{3}H 核と原子における Efimov 状態を統一的に理解できるようになると期待されます。

5.4 ^{12}C 核の励起状態 (Hoyle 状態)

Efimov 自身が 1970 年の論文で Efimov 状態が現れる可能性を議論したもう 1 つの系が ^{12}C 原子核の励起状態 (Hoyle 状態) です。^{12}C 核には非常に寿命の長い励起状態が存在することが知られており、Hoyle 状態と呼ばれています。Hoyle 状態は α 粒子 3 つが組んだ共鳴状態であり、宇宙における元素合成で非常に重要な役割を果たすことが知られています [90, 91, 92]。そのエネルギーは、α 粒子 3 つが独立に存在する閾値から測って +0.38 MeV と閾値のすぐ上にあり、3 粒子が弱く結びついた共鳴状態だと言えます。また、α 粒子 2 つの 2 体問題を考えた場合も、閾値のすぐ上 (約 0.09 MeV) に共鳴状態を形成します (^{8}Be 核に相当)。従って、α 粒子間の散乱長は非常に大きく、Hoyle 状態は 3 つの α 粒子が Efimov 状態を組んでいるのでは？と思えます [93]。Hoyle 状態が Efimov 状態か否かの議論を複雑にしているのが、α 粒子間の Coulomb 相互作用です。これまで紹介した Efimov 状態の理論は電荷を持たない粒子の 3 体問題に関するものなので、Coulomb 相互作用する 3 体系には直接適用できません。しかし、次のようにして Coulomb 相互作用する系で Efimov 状態が現れるかを定性的に議論できます。まず、Coulomb 相互作用は、その長さスケール a_{C} に比べて遠距離 $r > a_{\mathrm{C}}$ では支配的な一方、短距離 $r < a_{\mathrm{C}}$ では運動項や核力の方が支配的になり、Coulomb 相互作用は無視できます。従って、短距離領域 $r < a_{\mathrm{C}}$ では Efimov 状態の理論が適用できます。一方、遠距離では理論が適用できないため、a_{C} は Efimov 状態が存在できる最大の長さスケールを与えます。また、Efimov 状態が存在できる最小の長さスケールは α 粒子間の核力のレンジ b で与えられます。以上のことから、存在できる Efimov 状態の数は、式 (133) を応用することで

$$\frac{|s|}{\pi}\log\left(\frac{\min\left[|a|, a_{\mathrm{C}}\right]}{b}\right) \tag{151}$$

[41]陽子と中性子の間にはスピン・トリプレット (i.e. 陽子と中性子のスピンが平行) の場合の散乱長 a_t とスピン・シングレット (i.e. 陽子と中性子のスピンが反平行) の場合の散乱長 a_s がある。図 19 では、a_s は実験値に固定し、a_t を人工的に変化させている。なお、陽子と中性子にはアイソスピン対称性があるため、スピン反平行な 2 つの中性子間の散乱長は a_s と等しいと見なせる。

と見積もることができます。α 粒子については a_C は 1.8 fm 程度であり、また α 粒子間の散乱長 a と相互作用レンジ b はそれぞれ $a = 5.4$ fm, $b = 3.4$ fm 程度 [94] であることを用いると[42]、Efimov 状態の数は 0 個程度、もし存在したとしても 1 個だけということがこの表式から分かります。従って三重水素の時と同様「たった 1 個しか 3 体状態が存在せず、離散スケール不変性などを明確に検証できないときに、これを Efimov 状態と判断できるのか？」という問題が出てきます。また Coulomb 相互作用が存在するので、事態は三重水素の時よりもさらに複雑になります。

Efimov 状態の理論に Coulomb 相互作用を近似的に加えることで、^{12}C の Hoyle 状態を Efimov 状態として解釈できるかを探る研究が Higa と Hammer らによってなされています [95, 96]。図 20(A) のように α 粒子間の大きな散乱長によって現れる Efimov 効果の引力ポテンシャル (青実線) に Coulomb 斥力 (橙実線) を加えて得られた hyper-radial ポテンシャル（紫実線）の下では、$R_0 = 0.122$ fm で波動関数が 0 になるような境界条件を手で入れると、Hoyle 状態のエネルギー (紫破線) が再現されます。もし Coulomb 相互作用がない場合には、この Hoyle 状態は Efimov 引力ポテンシャルの下での Efimov 状態になり (青破線)、その意味で「Hoyle 状態は元々は Efimov 束縛状態であり、Coulomb 相互作用によってエネルギーが正の共鳴状態になったもの」と定性的に言えそうです。しかしこの議論には、α 粒子間の核力が十分に考慮されていないという問題があります。$R_0 = 0.122$ fm で波動関数が 0 になるという境界条件が、一見 α 粒子間の核力を取り込んでいるように思えますが、α 粒子間の核力のレンジは 3.4 fm 程度であり、$R_0 = 0.122$ fm と大きく異なります。また a_C と核力のレンジが同程度なので、$b \ll a_C$ という上記の Efimov 状態の理論が適用できる条件を全く満たしておらず、図 20(A) の $R \lesssim 3.4$ fm の領域の hyper-radial ポテンシャルは核力によって大きな変更を受けます。従って、Hoyle 状態を Efimov 状態とみなせるか否かを判断するには、α 粒子間の核力も取り込んだ正確な 3 体計算が必要になります。

核力や Coulomb ポテンシャルを全て取り込んだ 3 体計算による Hoyle 状態の研究も進んでいます [97, 98]。それらの研究によると、核力由来の引力が Hoyle 状態を共鳴状態として結びつける重要な役割を果たしていることが分かっています [98]。また Hoyle 状態は図 20(B) のような正三角形に近い形状をしており [97]、図 18(B) のような Efimov 状態特有の結合性軌道由来の細長い三角形の形状とは大きく異なっています。これらのことから Hoyle 状態はゼロレンジ理論の Efimov 状態とは大きく異なる性質のものだといえます。一方、図 20(B) の形状は図 18(D) に示した有限レンジの効果を強く受けた基底状態の Efimov 状態の形状に似ています。実は最近の電荷を持たない系における Efimov 状態の研究で、図 18(D) のような有限レンジの効果を強く受けた基底状態についても、Efimov 状態のユニバーサリティの概念が成立することが分かってきました [89, 99]。Hoyle 状態のような電荷を持つ系でも、この拡張された意味での Efimov 状態のユニバーサリティが成立しているのか否かは今後の興味深い課題の 1 つです。

5.5 中性子過剰核・ハロー核

粒子間の散乱長が大きくなる原子核系の典型的な例が中性子過剰核です。原子核では、陽子と中性子の数がほぼ等しい方がエネルギー的に安定なため、自然界に存在する安定な原子核では陽子と中性子の数がほぼ同数になります。しかし、加速器を用いた実験などで不安定な原子核も合

[42] α 粒子間の現象論的ポテンシャルを散乱実験のデータなどから構成し、そのうちの Coulomb 相互作用を除いた核力部分の散乱長とレンジ。

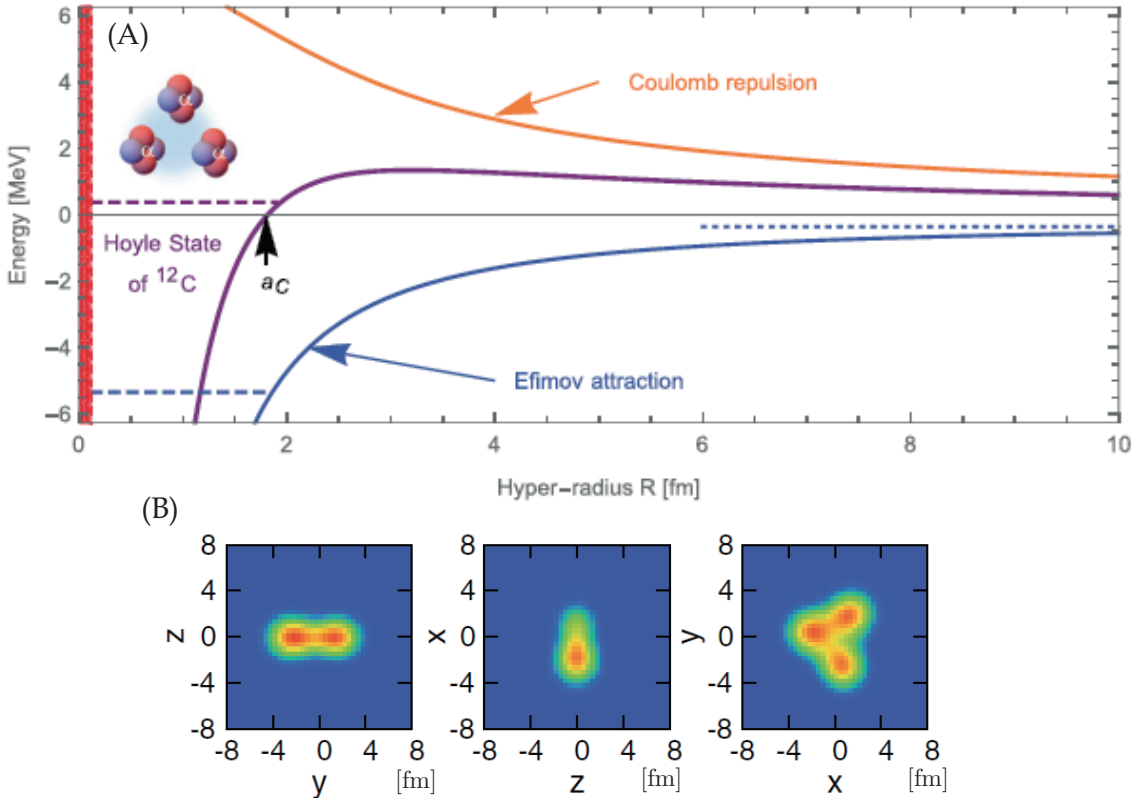


図 20: (A)α 粒子 3 体系における hyper-radial ポテンシャルと Hoyle 状態（[15] より引用）。α 粒子間の散乱長を $a = 5.4$ fm として、Coulomb 相互作用を無視したときに得られる Efimov 効果由来の引力 (青実線) と Coulomb 相互作用 (橙実線) を個別に考えて、それらを足すことで hyper-radial ポテンシャル（紫実線）を得ている。α 粒子間の散乱長が正なので、Efimov 引力は α 粒子の 2 粒子束縛状態のエネルギー $-1/ma^2$ に漸近する (現実の α 粒子の 2 体系である ^{8}Be は束縛状態ではなく共鳴状態だが、この違いは Coulomb 相互作用を無視しているため)。Hoyle 状態のエネルギー 0.38 MeV（紫破線）を再現するために $R_0 = 0.122$ fm 以下の短距離で波動関数が 0 になるという境界条件を課している (赤領域)。この境界条件と Efimov 引力のみ (i.e. Coulomb 相互作用がない場合) では共鳴状態であった Hoyle 状態のエネルギーが $E < 0$ となり、束縛状態になる (青破線)。(B) 配位混合法によって得られた Hoyle 状態の波動関数の密度分布（[97] より引用）。この図は Hoyle 状態と最も重なり積分が大きな配位を示したものだが、その値も高々40 %程度であり、他の多くの配位・形状も寄与する。

成できます。こうした不安定な原子核のうち、特に中性子の数が陽子の数よりかなり多い原子核のことを中性子過剰核と呼びます。このような中性子過剰核の性質を知ることは、宇宙における元素合成を理解するために不可欠であるため、近年盛んに研究がなされています。

中性子過剰核のうちいくつかは、そのサイズが異常に大きく、中性子が原子核からかなり遠方まで染み出しているということが分かっています。このような核は、中性子が原子核の外までぼんやりと広い領域に分布している様子から「ハロー核」と呼ばれます。ハロー核では、中心核に中性子が弱く結びついている結果、空間的に広がった中性子のハローが生じていると考えられます。実際、いくつかのハロー核ではこの描像が良く成り立ち、「中心核＋中性子」の 2 体系と近

似的に見なせます。そして、弱く結びついているということは、大きな散乱長で相互作用するユニタリー極限に近い系だと考えられるわけです。図 21 に、ハロー核と考えられている原子核の例を示します。特に、重陽子以外にも、^{11}Be、^{19}C といった核は「中心核＋中性子」として振る舞います。

これらの「中心核＋中性子」として振る舞う核に対して、さらに 1 つ中性子を追加した三重水素や ^{12}Be、^{20}C といった核だとどうなるか？中心核と中性子は大きな散乱長で相互作用をすることに加え、中性子間の散乱長も大きいので、これらの核を、「中心核＋中性子 (↑ スピン) ＋中性子 (↓ スピン)」の 3 粒子が大きな散乱長で相互作用している系と見なしたくなります。そのような場合 Efimov 状態が現れるので、三重水素や ^{12}Be、^{20}C は「中心核＋中性子 (↑ スピン) ＋中性子 (↓ スピン)」の 3 体系が成す Efimov 状態なのでは？と思いたくなります。この予想は三重水素については正しい一方 (Sec. 5.3 参照)、^{12}Be と ^{20}C については注意が必要です。これらの核は、現状においてはハロー核ではなく、↑スピンと↓スピンの中性子がペアを組んで、中心核に強く束縛した核だと考えられています。しかし Sec. 4.3 や Sec. 5.3 でも議論した通り、基底 Efimov 状態は比較的強く束縛され、そのサイズは $\langle R\rangle \sim b \sim$ 数 fm 程度になります。特に散乱長が正の場合は、Efimov 基底状態は束縛エネルギーが大きく、有限レンジ補正の効果を非常に強く受けます。従って、この強く束縛された核だと見なされている ^{12}Be や ^{20}C も、もしかしたら基底 Efimov 状態と見なして良いのかもしれません。

「中心核＋中性子」が束縛しない系でも、「中心核＋中性子 (↑ スピン) ＋中性子 (↓ スピン)」の 3 粒子が束縛する可能性も考えられます。そのような 2 中性子ハロー核として、^{6}He、^{11}Li、^{14}Be、^{17}B、^{19}B、^{22}C などが知られています。これらの系がもし Efimov 状態であれば、「中心核＋中性子」系は束縛していないので、負の散乱長の領域、すなわちボロミアンな領域での Efimov 状態ということになります。これらのうち、^{11}Li、^{14}Be、^{19}B、^{22}C などを Efimov 基底状態と見なすことが可能で、そのような理論研究がなされています [6, 100, 101, 102, 103]。一方、^{6}He については注意が必要です。α 粒子と中性子の s 波散乱長は特に大きくない一方、p 波には共鳴（^{5}He の基底状態に相当）があり、p 波の相互作用が非常に大きくなっています。そのため、s 波相互作用のみを考慮する通常の Efimov 理論では記述できず、p 波相互作用も含めた理論的な記述が必要になります [104]。^{11}Li についても、p 波散乱が定量的には無視できないことが指摘されています [100]。

これらのハロー核を基底 Efimov 状態と見なせる場合には、その束縛エネルギーが大きく、有限レンジ補正の効果や s 波以外の相互作用などが強く効く可能性があるため、単純な Efimov 状態との比較が容易ではありません。もしハロー核で 3 粒子束縛状態が 2 つ以上見つかれば、それらの間に離散スケール不変性があるかどうかをより直接的に検証できます。さらに、励起状態は基底 Efimov 状態に比べて束縛エネルギーが非常に小さいため、有限レンジ補正の効果や s 波以外の相互作用などが無視でき、ゼロレンジ Efimov 理論との直接比較が容易になります。中心核・中性子間および中性子間の相互作用の散乱長をすべて無限大と仮定したゼロレンジ模型では、このような「重い＋軽い＋軽い」の 3 粒子系における Efimov 状態のスケール因子は 15 くらいになります (図 14 参照)。同種 3 ボソン系のスケール因子 22.7 よりは小さいので、中心核・中性子間の散乱長が十分に大きければ、励起 Efimov 状態が現れても不思議ではありません。

しかし残念ながら、このような励起 Efimov 状態も現れると期待できる候補は現状では非常に少なく、有力候補は ^{19}B と ^{20}C のみです [105, 106]。^{22}C も可能性はありますが、最近の実験デー

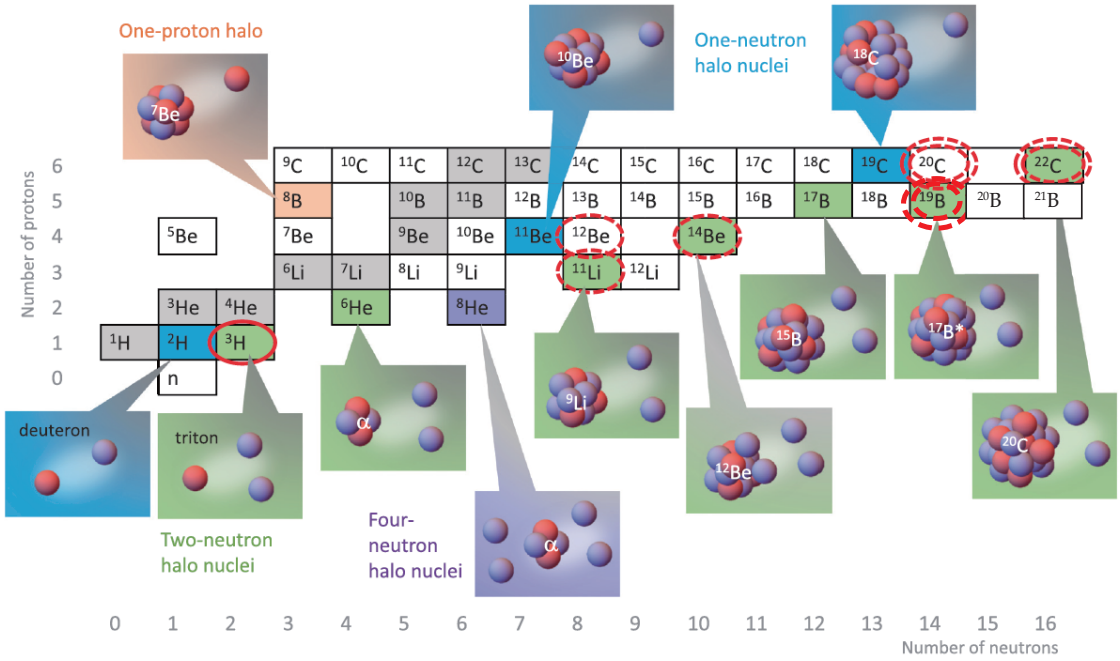


図 21: 安定核 (灰色) と観測されているハロー核を示した核図表。1 陽子ハロー (橙色)、1 中性子ハロー (青色)、2 中性子ハロー (緑色)、4 中性子ハロー (紫色) をそれぞれ色分けして示す。それぞれのハロー核について、その構造を示す概略図を併記している (赤丸が陽子、青丸が中性子)。核図表中に赤丸で Efimov 基底状態が現れうるハロー核、二重丸で Efimov 基底状態と励起状態がともに現れうるハロー核を示す。これらは原子核において Efimov 状態を示す候補だが、未確定なため破線で示す。三重水素については、Efimov 基底状態と見なせると分かっているため実線で示す。[15] より編集。

タなどにより、励起 Efimov 状態が現れる可能性は低いだろうということが分かっています [107]。^{19}B については、^{17}B と中性子の間の s 波散乱長が非常に大きいということが最近の実験でも観測されており [108]、現状では、^{19}B が、原子核系で励起 Efimov 状態が初めて観測される最有力候補だと言えるでしょう。特にホウ素 (B) の同位体については、2018 年に ^{20}B や ^{21}B が初めて観測されており [109]、ホウ素の原子核について今後さらに研究が進展していくものと期待できます。

ハロー核には、陽子が原子核から大きく染み出した「陽子ハロー」も存在します。^{8}B がその一例です。この陽子ハローでは、Coulomb 相互作用が陽子と中心核の間に働くため、Sec. 5.4 でも議論した通り Efimov 状態が現れにくくなります。散乱長が桁違いに大きな系であれば、そのような Coulomb 相互作用がある場合でも Efimov 状態が出現することもあり得ますが、現状ではそのようなことが起こる有力候補となる陽子ハロー核は知られていません。

5.6 磁性体

これまで、原子や原子核などの系の Efimov 状態について解説してきました。しかし実は、固体中の電子系においても Efimov 状態が現れることが分かってきています。そもそも Efimov 状態は散乱長が大きな低エネルギー系でユニバーサルに現れる少数多体現象なので、固体中の電子系

において現れてもおかしくないわけです。ただし、Sec. 5.4 でも解説した通り、Coulomb 相互作用が存在する系では Efimov 状態の出現が抑制されるため、長距離的な Coulomb 相互作用があまり働かない方が望ましいと考えられます。固体中の電子間には Coulomb 相互作用が働くのですが、多数の電子による遮蔽効果があるため、有効相互作用として短距離型の相互作用が出現することがよくあります。実際、強相関電子系の典型的な模型である Hubbard 模型や、量子スピン系の典型的な模型である Heisenberg 模型では、まさにそのような短距離型の相互作用を考えます。特に Heisenberg 模型においては、強磁性相が現れるような低温領域において、電子スピンの集団励起としてマグノンと呼ばれる素励起が存在します。この素励起は、ボース統計に従い、低エネルギーで $\varepsilon \propto k^2$ と振る舞う点で、ボース粒子が自由空間を飛び回る様子と酷似しています。この類似性を利用し、西田らは Heisenberg 模型において、マグノン 3 つが Efimov 状態を形成しうることを理論的に示しました [110]。等方的な Heisenberg 模型ではマグノン間相互作用はなく、マグノンは自由粒子として振る舞うのですが、固体中の結晶場の効果や異方性によりマグノン間に相互作用が発生します。マグノン間の s 波散乱長が発散的に大きくなるようなパラメータ領域で、マグノンの 3 体問題を数値的に解くと、Efimov 状態が現れるということが示されました。そのスケール因子は「22.7」であり、Efimov 状態のスケール因子と一致することが示され、Efimov 状態が原子、原子核、固体物性にわたって普遍的に現れるということが改めて明らかになったのです。

これまでは原子・核子・α 粒子などの「ちゃんとした粒子」が Efimov 効果を起こすということは知られていましたが、量子多体問題において現れる「素励起」も Efimov 効果を起こしうることが明らかになった点も注目に値します。ここでは、Heisenberg 模型においてマグノンの数が良い量子数であることが重要な役割を果たしています。もし良い量子数でなければ、マグノンが生成・消滅を繰り返し、「マグノン 3 体問題」を「1 体問題」「2 体問題」や「4 体問題」「5 体問題」などと合わせて考える必要があり、Efimov 状態の「3 粒子束縛状態」という描像が破綻するからです。そのように生成・消滅を繰り返すような「素励起」たちが大きな散乱長で相互作用する場合に何が起きるか？、という問題についても、今後研究が進んでいくものと期待されます。また、固体物性において Efimov 現象や類似した離散スケール不変な現象を観測しようという試みも行われ始めており [111, 112, 113]、「Efimov 状態」を足掛かりに、異なる階層・分野の現象を統一的に理解しようとする研究も進んでいます。

5.7 Dynamical Efimov expansion

ここまで主にエネルギー固有状態・定常状態としての Efimov 状態を紹介してきましたが、Efimov 状態と類似のスケール不変現象をダイナミクスとして観測した Dynamical Efimov expansion と呼ばれる面白い研究があります [114, 115]。原子気体の実験では、光や磁場によって原子をトラップしています。このトラップ・ポテンシャルは良い近似で調和振動子型とみなせるため、原子気体の時間発展のダイナミクスは、時間依存 Schrödinger 方程式

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}, ..., \boldsymbol{r_N}, t) = \sum_i \left(-\frac{\nabla_i^2}{2m} + \frac{m\omega^2(t) r_i^2}{2} \right) \Psi(\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}, ..., \boldsymbol{r_N}, t) \tag{152}$$

で記述されます。ここではまず簡単のため原子間相互作用を無視しますが、相互作用の効果は後で考察します。Efimov 状態の離散スケール不変性の起源は、式 (84) の Schrödinger 方程式が、

$R \to \Lambda R, E \to \Lambda^{-2}E$ のスケール変換に対して不変な形をしていることでした。このことから、上の時間依存 Schrödinger 方程式もスケール不変であれば、Efimov 状態と類似の離散スケール不変なダイナミクスが現れるだろうと期待できます。実際、式 (152) が $\boldsymbol{r}_i \to \Lambda \boldsymbol{r}_i$ に対してスケール不変であるための条件を考えると、$t \to \Lambda^2 t$、$\omega(t) \to \Lambda^{-2}\omega(t)$ とすれば、両辺がそれぞれ $i\partial_t \to \Lambda^{-2} i\partial_t$、$H \to \Lambda^{-2}H$ とスケールし、方程式が不変に保たれることが分かります。いま、調和型のトラップの強さや形状を特徴づける $\omega(t)$ は光や磁場の強さなどで制御することができます。この周波数が

$$\omega(t) = \frac{\lambda}{t} \tag{153}$$

のような時間依存性を持つように光や磁場の強さを制御すれば、式 (152) はスケール不変な形になります。そのような場合に、この Schrödinger 方程式は解析的に解け、時間の対数 $\log t$ について周期的に振動する解が現れます。この時間発展についての周期振動は、まさに Efimov 状態における hyper-radial 波動関数 (式 (87) 参照) の $\log R$ に関する周期振動に対応しています。Efimov 状態においては式 (84) の hyper-radial ポテンシャルの強さ s^2 がエネルギーに対するスケール因子 $\exp(2\pi/|s|)$ を特徴づけていましたが、Dynamical Efimov expansion においては λ がそれに相当し、$\lambda > 1/2$ において $\exp(\pi/\sqrt{\lambda^2 - 1/4})$ というスケール因子に対してスケール不変なダイナミクスが現れます。

この現象の本質は Schrödinger 方程式のスケール不変性です。式 (152) では原子間相互作用のない系の時間発展を考えましたが、原子間相互作用を特徴づける s 波散乱長が発散するユニタリー極限では、原子間相互作用項もスケール不変になるため、全く同様のスケール不変なダイナミクスが現れます。相互作用のない原子気体と、ユニタリー極限で相互作用する原子気体の両方について、このようなスケール不変なダイナミクスが冷却原子気体の実験で観測されました [114]。

この Dynamical Efimov expansion は、3 粒子現象とは一見全く異なるものなのですが、方程式が数理的に等価だということを利用し、次のようなことを行えるという長所があります：(i)Efimov 状態の波動関数が実空間で周期振動する様子を直接観測することは困難な一方 (Sec. 5.2 参照)、その振動する様子が Dynamical Efimov expansion では明瞭に見える。(ii)Efimov 状態のスケール因子は質量や粒子の統計性で一意に決まるため自在に制御することが困難な一方 (図 14 参照)、Dynamical Efimov expansion では光や磁場の強さで自在に制御できる。特に長所 (ii) を活用し、冷却原子の 3 体系では観測が難しいスーパー Efimov 状態（エネルギースペクトルが二重指数関数的なスケーリング則に従う 3 体束縛状態）と同じ数理構造をもつダイナミクスを、Dynamical Efimov expansion 実験で観測することに成功しています [115]。このような実験は、自然界では実現が難しい現象を人工的に作り出して詳細に観測するという、冷却原子の量子シミュレータとしての優れた特長を最大限に活用した実験だと言えます。

6 Efimov 状態を超えて

散乱長が大きな 3 体系においては、様々な系で普遍的に Efimov 状態が発現することを見てきました。では 4 粒子、5 粒子、6 粒子ではどうなるでしょうか？さらに粒子数を増やしていくと、粒子数無限大の熱力学極限へとどのようにつながっていくのでしょうか？また、Efimov 状態とは異なるスケール不変性を示すユニバーサルな 3 体、4 体、5 体状態も最近では発見されており、Efimov 状態はいくつもあるユニバーサルな少数状態の 1 つであることも分かってきています。こ

の節では、これらに関する最近の研究を紹介します。これらの研究は現在も活発に続いており、もともとは量子 3 体問題の特異な現象であった Efimov 状態の研究が、量子少数多体系の示すユニバーサルな現象というより広い枠組みの中で、様々な物理系の量子現象を理解することにつながっています。

6.1 4 体、5 体、6 体……

4 粒子状態 4 粒子以上の系においても、3 粒子の Efimov 状態と同様の離散スケール不変な束縛状態が現れるか？という疑問は、1970 年に Efimov 状態が発見された直後から研究されてきました。特に 1973 年には、Amado と Greenwood による「There Is No Efimov Effect for Four or More Particles」というタイトルの論文 [116] により、同種ボース粒子系においては、4 粒子以上の系で Efimov 効果が起こらないということが示されました。ここで「N 粒子系での Efimov 効果 (N-body Efimov effect)」の定義は「$N-1$ 粒子が束縛状態を形成する引力相互作用 g_c より弱い引力相互作用 $|g| < |g_c|$ で N 粒子束縛状態が可算無限個現れ（ボロミアン状態）、それらが離散スケール不変な挙動を示す。」ということです。$N = 3$ の場合にまさにこのことが起こっているのが、Efimov 現象でした。

この Amado と Greenwood の研究から 4 体 Efimov 状態が現れないことが分かった一方、「4 体 Efimov 状態とは異なる、ユニバーサルな 4 体束縛状態は存在するか？」という問いは残りました。この問いに答えるため、大きな散乱長で相互作用するボース 4 体問題に関する多くの理論研究が行われました [117, 118, 119, 120, 121]。これらの研究により、4 粒子ボース系においてはユニバーサルな 4 体束縛状態が存在し、図 22(a) のように振る舞いそうだという結論に達しつつあります。各 Efimov 状態（赤線）に付随して、4 粒子状態が 2 つずつ現れます（紫線。「Tetramer 1」「Tetramer 2」）[117, 118, 119]。両者とも負の散乱長領域で現れ、散乱長を正の方へと変えていくと、最終的に dimer+dimer へと分解していきます。Tetramer 1 は束縛エネルギーが大きく、4 粒子が強く束縛した構造を持っている一方、Tetramer 2 の方は Efimov trimer のエネルギーの直下に現れ、非常に小さな束縛エネルギーを持っているため、「Efimov trimer と 1 粒子が束縛状態を組む」ような構造になっています。これらの 4 体状態は Efimov 状態に付随しているため、$e^{\pi/|s_0|}$ のスケール変換により、励起 Efimov 状態に付随した 4 体状態と関係づけられます。そのような意味で離散スケール不変性は示すのですが、これらは「4 体 Efimov 状態」ではありません。「4 体 Efimov 状態」とは、3 粒子束縛状態が現れ始める threshold(図 22(a) の「No 4-body Efimov」と記した点) の近傍に 4 体束縛状態が無限個現れて、それらが離散スケール不変性を示すことを指し、そのような現象は起きません。この違いには注意が必要です。

基底 Efimov 状態に付随した 2 つの Tetramer と励起 Efimov 状態に付随した 4 体状態は、いくつかの異なる性質を示します。前者は束縛状態である一方、励起 Efimov 状態に付随した 4 体状態は「3 体束縛状態＋ 1 粒子」の連続スペクトル (赤領域) の中にあるため、これらは有限寿命をもった共鳴状態として現れます。また、励起 Efimov 状態に付随した 4 体状態のうち、エネルギーの高い「Tetramer 2」の方は、正の散乱長領域で散乱長を変化させると「Trimer + particle」に分解してバーチャル状態になり、また「Tetramer 2」として再び現れる、という特異な振る舞いをします。なぜこのような振る舞いをするのかは明確には分かっていませんが、この興味深い振る舞いは、連続状態の効果や寿命も正確に取り込んだ高精度の量子 4 体計算によって初めて明らかに

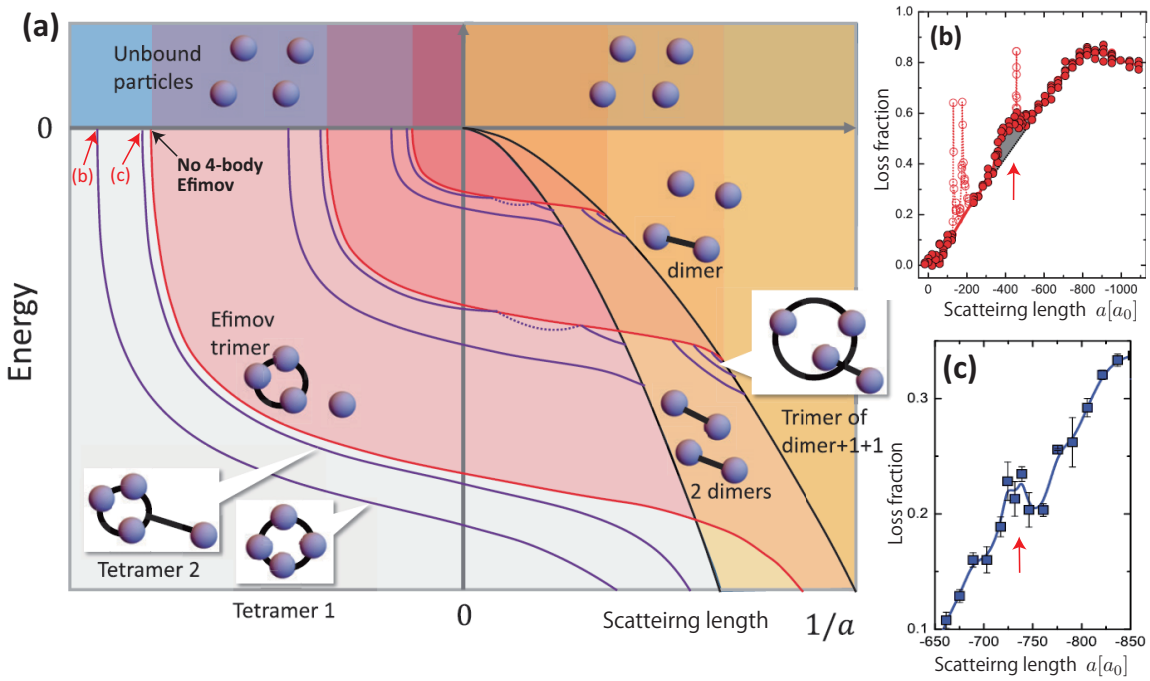


図 22: (a) ユニタリー極限付近での同種 4 粒子ボソンのエネルギースペクトル (角運動量とパリティは $L^\pi = 0^+$)。2 体、3 体、4 体状態のスペクトルをそれぞれ黒線、赤線、紫線で示す。それぞれの状態を表す模式図を併記してある。紫点線は 4 体バーチャル状態。(b)(c)4 体状態の冷却原子実験による観測。散乱長を変化させた際に、原子のロスが増大することにより 2 つの 4 体状態が観測された。図 (a) 中の赤矢印で示した位置が、それぞれ図 (b)(c) 内の赤矢印に相当。図 (a),(b)(c) はそれぞれ、[15] と [122] より引用。

なりました [121]。

これらの 4 体状態のうち、基底 Efimov 状態に付随した 4 体束縛状態 2 つが、冷却原子気体の実験で観測されました [122]。図 22(b), (c) に示すように、散乱長を変化させたときに、理論で予言された位置で原子のロスが増大することが観測されました。一方、励起 Efimov 状態に付随した 4 体共鳴状態は未だに観測されていません。また、Efimov trimer 状態が dimer+particle に分解する近傍でも、4 体状態が存在することが理論的に予言されています [119, 123](図 22(a) の「Trimer of dimer +1+1」)。これも未だ観測されていません。この 4 体状態は、dimer と particle の間の s 波散乱長がこの近傍で発散的に大きくなり、「dimer と particle と particle」の 3 粒子が Efimov 状態を形成するような状態です。質量比が 2 なので、スケール因子は 22.7 と異なる値になります (図 14 参照)。このように、dimer や trimer が複合粒子となり、それらが少数多体状態の形成に寄与していくことが、4 体以上の少数多体現象の非常に興味深い点でもあります。

5 粒子, 6 粒子……状態　5 粒子以上についても研究が進んでおり、これまでの理論計算 [124, 125, 126, 127] により、図 23(a) のようなエネルギースペクトルが現れることが分かっています。5 体、6 体、7 体... と N 体状態が次々に現れ、これらの N 体クラスター状態はそれぞれの Efimov 状態に付随して現れると考えられています。粒子数を増やすと、5 体状態が「trimer+dimer」に分解する

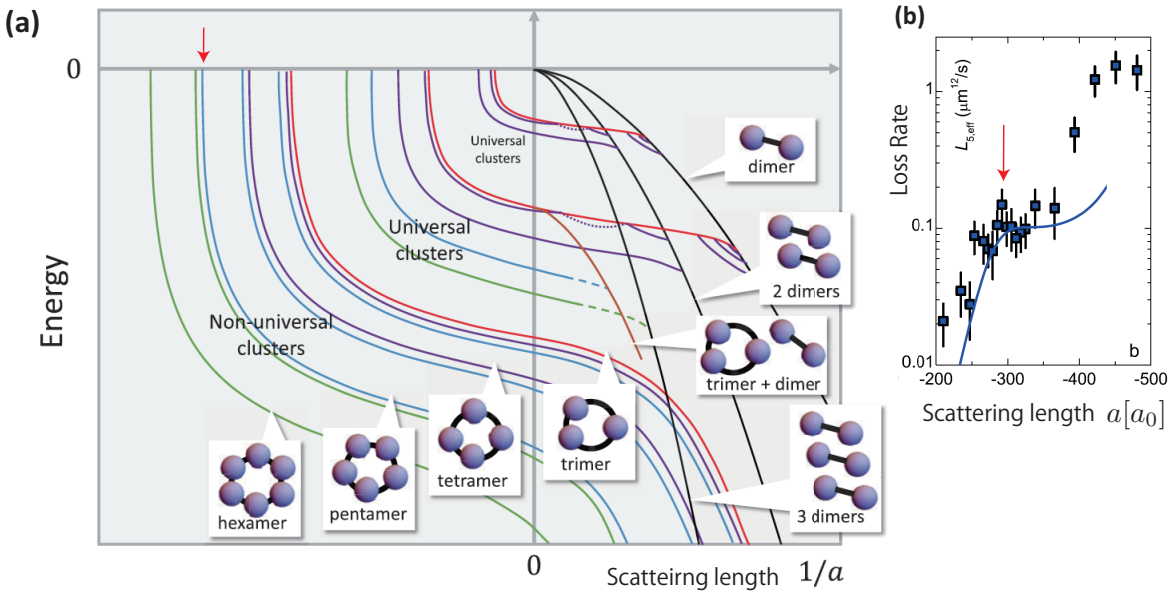


図 23: (a) ユニタリー極限付近での N 粒子ボソンのエネルギースペクトル (角運動量とパリティは $L^\pi = 0^+$)。2 体、3 体、4 体、5 体、6 体状態のスペクトルをそれぞれ黒線、赤線、紫線、青線、緑線で示す。それぞれの状態を表す模式図を併記してある。紫点線は 4 体バーチャル状態。(b)5 体状態の冷却原子実験による観測。散乱長を変化させた際に、5 体ロスレート $L_{5,\mathrm{eff}}$ が増大することにより 5 体束縛状態が観測された。図 (a) 中の赤矢印で示した位置が、図 (b) の赤矢印での散乱長に相当。図 (a),(b) はそれぞれ、[15] と [128] より引用。

といったことも起こり、全体的にエネルギースペクトルが複雑化していきます。また図 23(a) には記されていませんが、dimer や trimer が複合粒子となった結果現れる「dimer+dimer+particle」「dimer+dimer+dimer」「trimer+particle+particle」の Efimov 状態なども現れるかもしれません。

これらの 5 体以上の状態は、ほとんどが実験で観測されていません。唯一観測されたのは 5 体束縛状態の基底状態です [128]。5 体束縛状態が負の散乱長領域で 5 原子に分解する付近 (図 23(a) 赤矢印) で、図 23(b) のように原子のロスレートが増大することから、この 5 体束縛状態の存在が確認されました。この 5 体束縛状態 (i.e. 5 体衝突) によるロスレートの増大は、3 体、4 体束縛状態 (i.e. 3 体・4 体衝突) による原子ロスの寄与よりも遥かに小さいため、非常に高精度の実験技術が要求されます。6 粒子、7 粒子状態の観測にはさらに高度な実験技術が必要となるため、5 体以上の N 体状態を冷却原子実験で観測するのは容易ではありません。

6.2 量子少数系と多体系のつながり

前節の 4 粒子、5 粒子、6 粒子... と粒子数を増やした際の量子少数系を探る研究は、実験的に検証することが困難な一方、「粒子数を 1 つ 1 つ増やしていった際に、どのように量子多体系の熱力学極限的な振る舞いに達するのか？」という本質的な問いに関連しています。この節では、この問いに答えるために行われている最近の興味深い研究をいくつか紹介します。

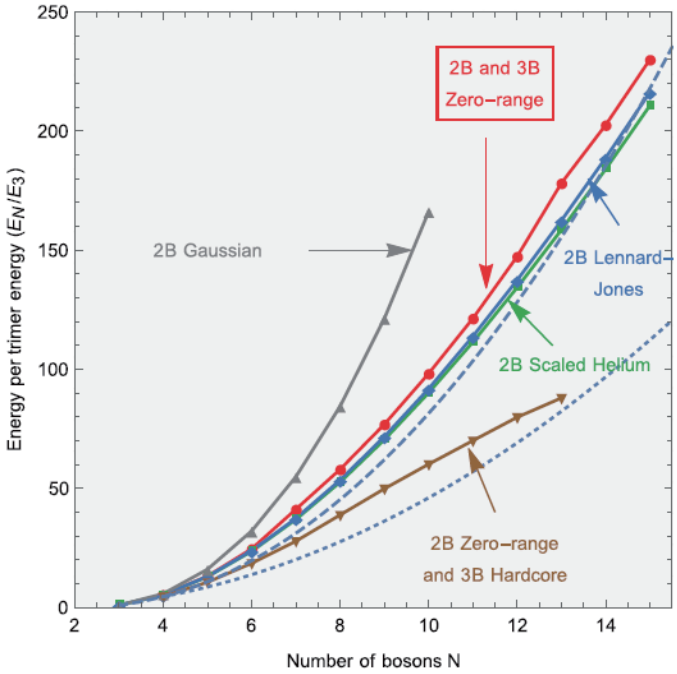


図 24: 理論計算 [124, 125, 126, 127] によって得られた、ユニタリー極限における N 粒子ボソン系の基底状態の束縛エネルギー。2 体相互作用のみによるもの:Gaussian 相互作用 (灰実線)、He 型相互作用 (緑実線)、Lennard-Jones 型相互作用 (青実線)。2 体相互作用＋ 3 体相互作用によるもの：2 体・3 体ともにゼロレンジの相互作用 (赤実線)、2 体ゼロレンジと 3 体ハードコア相互作用 (茶実線)。青点線 [129] と青破線 [126] は、これら量子少数系計算結果から類推された、N 粒子系のエネルギーの解析的な予言式。(図は [15] より引用。)

少数系から多体系へ　N 粒子ボース系の基底状態のエネルギーが、粒子数を増やしていくとどうなるかなどを探る研究が行われています。それらの研究の結果を 1 つのグラフにまとめたものを図 24 に示します。粒子間相互作用の形状等による多少の違いはあるものの、全体的な傾向として、粒子数が少ない場合は $E \propto N^2$ のように振る舞います。この領域では、全ての粒子が互いに相互作用しており、その相互作用によるエネルギーが $E \propto N(N-1)/2$ のように振る舞っていると理解できます。一方、粒子数が大きな領域では $E \propto N$ のように振る舞うように見えます。この領域では、系のサイズが大きくなったことにより、1 つの粒子がそのまわりにいる数粒子とは相互作用できるが、遠方にいる粒子との相互作用は媒質の効果により遮蔽されてしまう、という状況になっていると理解できます。このように粒子数を増やしていった際に、$E \propto N^2$ という少数系的な挙動から $E \propto N$ という熱力学的な挙動へと連続的に変化していく、ということが分かっています。その境界である粒子数が $N = 6-10$ 程度であるということも、幾何学的に考えれば理解できます：3 次元空間において、1 つの球の周りにどんどん他の球を配置する問題を考えてみましょう。その 1 つの球の周りの上下・左右・前後に球が配置されるには $N = 6$ 個くらい球があればよいだろう、と思えます。一方、球体を最密充填に並べることを考えた場合、1 つの球のまわりには 12 個の球が隣接します。そのような状況になれば、中心にいる 1 つの球は「他の球が形成する媒質内にいる」と見なすことができます。

この物理的描像は、量子的な挙動や表面での粒子の振る舞いを無視した非常に単純なものである一方、1 つの知見を与えてくれます：１次元系や２次元系といった低次元の系では、少数系から多体系へと振る舞いが変化していく臨界粒子数が、３次元系よりも小さいだろう、ということです。本講義では３次元系のみを扱いましたが、１次元、２次元系における量子少数多体系の研究もかなり進展しています。実は、Efimov 状態は 1 次元や 2 次元系では現れず、3 次元系特有の現象である、ということが分かっています [13, 130, 131]。さらに、1 次元や 2 次元系では Efimov 状態は現れないものの、Efimov 状態と異なる性質を持つユニバーサルな 3 粒子束縛状態 [130, 132, 133, 134] が存在するということが分かっています。このように、次元や粒子数を変えていったときに、どのような量子少数多体状態が現れるかを探る研究も進展しています。

多体問題における 3 体相関　Efimov 状態などの量子 3 体問題の研究は、量子多体問題に応用することもできます。特に、強く相互作用する量子多体系における 3 体相関を正確に理解するために、量子 3 体問題の研究が役立つと期待されており、そのような研究が急速に発展しています。いくつかの具体例を以下に列挙します：

- 3 粒子、4 粒子の正確なエネルギー・固有状態を利用した、高精度な状態方程式や N 体波動関数の性質の研究 [135]。高温で有効なビリアル展開 [136, 137] や、低温で有効な変分波動関数の方法 [138, 139, 140] などが試みられています。
- 3 粒子束縛状態が形成され、それらが基本構成要素となった Trimer 量子相の研究 [141, 142]。
- Efimov 状態由来の強い 3 体相関をもった量子多体相の研究 [143, 144, 145]。

これらの研究が進展することにより、従来は別々に研究されることが多かった量子少数系と量子多体系の統一的な理解につながっていくことが期待されます。

6.3　フェルミ粒子系における Efimov 状態や、Efimov 状態と異なるユニバーサル状態

Sec. 4.1 でも紹介した通り、フェルミ粒子系で排他律による斥力がある 3 体系は、質量比によってその挙動が大きく変化します。散乱長が無限 $1/a = 0$ のユニタリー極限では、質量比が大きな場合 ($M/m > 13.606$) には可算無限個の 3 粒子束縛状態が Efimov 状態として現れる一方、小さな場合 ($M/m < 13.606$) には hyper-radial ポテンシャルが斥力になり、3 粒子束縛状態が現れません。従って、質量比 13.606 を境に、3 粒子束縛状態の数が「０個」から「無限個」に突然変わるわけです。このような突然の変化が起こるのは非常に奇妙だと一見思えますが、これは $1/a = 0$ のユニタリー極限を考えたことに由来しています。実際の物理系では、散乱長はどんなに大きくても有限なため、「大きいが有限値の散乱長」で 3 体系に何が起こるかということについて、もう少し丁寧に考察する必要があります。

この「大きいが有限値の散乱長」の 3 体系を考えることで、2007 年に Kartavtsev と Malykh が新しいタイプの 3 粒子束縛状態を発見しました [146][43]。2 フェルミ粒子+1 粒子系が、大きいけれども有限の s 波散乱長で相互作用する際の 3 粒子間の hyper-radial ポテンシャルを図 25 に示

[43] この Kartavtsev と Malykh をはじめ、Efimov, Faddeev, Skorniakov, Ter-Martirosian らの量子少数多体問題の発展にロシア系の研究者が多いというのも興味深いことです。

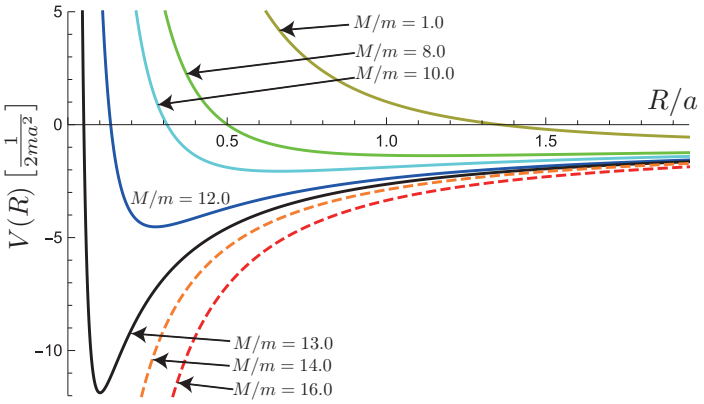


図 25: 2 identical fermion + 1 粒子系における、3 粒子間の hyper-radial ポテンシャル ($L^\pi = 1^-$)。散乱長が正で非常に大きい ($a \gg b, a > 0$) という条件で、ゼロレンジ相互作用を用いて求めた。Efimov 状態が現れない場合 $M/m < 13.606...$ での hyper-radial ポテンシャルを実線、Efimov 状態が現れる場合 $M/m > 13.606...$ を破線で示す。

します。質量比が小さな $M/m \lesssim 8$ では hyper-radial ポテンシャルは斥力的で 3 粒子束縛状態は現れず、質量比が大きな $M/m > 13.606$ の場合 (破線)、引力的になり Efimov 状態が現れます。その中間である $8 \lesssim M/m \leq 13.606...$ において、hyper-radial ポテンシャルが興味深い形をしています。近距離では強い斥力が働く一方、$R \sim a$ の領域では引力的になります。この奇妙な形状は、Pauli 排他律による斥力と媒介相互作用による引力の競合の結果生じたものです。このポテンシャルには、$R \sim 0.1$–$1.0\,a$ 付近に極小が現れます。Kartavtsev と Malykh は、このポテンシャルの極小付近に束縛状態が現れることを見出しました。さらに、チャンネル結合も考慮した正確な 3 体計算により、$8.17260... \leq M/m \leq 12.91743...$ ではそのような 3 粒子束縛状態が 1 つ、$12.91743... \leq M/m \leq 13.606...$ では 2 つ現れることを示しました。

Efimov 状態とは異なるユニバーサルな 3 粒子束縛状態　この 3 粒子束縛状態は、Efimov 状態とは全く異なる、以下のような性質を持ちます：

(i) 散乱長が正で大きな場合のみ現れる

$a > 0$ では図 25 のようにポテンシャル極小が現れるのに対し、$a < 0$ では hyper-radial ポテンシャルにそのような極小は現れません。その結果、Kartavtsev と Malykh の 3 粒子束縛状態は、$a > 0$ でのみ現れます。これは Efimov 状態が $a < 0$ の領域でも現れ、ボロミアン状態として振る舞うことと対照的です。

(ii)3 粒子束縛状態のサイズは $\langle R \rangle \sim a$ 程度

Kartavtsev と Malykh の発見した 3 粒子束縛状態のサイズはポテンシャル極小の位置で決まり、$\langle R \rangle \sim a$ 程度です。特に s 波散乱長 a が大きな領域では、3 粒子束縛状態が非常に大きなサイズになります。これは Efimov 状態のサイズが 3 体パラメータで決まり、特に基底状態のサイズが相互作用の到達距離程度 $\langle R \rangle \sim b$ であったことと対照的です。

(iii) 散乱長 a のみで、ユニバーサルに記述できる

図 25 に示す通り、$M/m < 13.606...$ では hyper-radial ポテンシャルが短距離で非常に強い斥力を示します。このことは、3 粒子の波動関数が短距離で指数的に減衰することを意味します。そのた

め、2 体相互作用や 3 体相互作用が短距離でどんなに複雑であったとしても、3 粒子が近づくことができず、散乱長 a のみでこの 3 粒子束縛状態がユニバーサルに記述できるのです。実際、3 粒子束縛状態のサイズや束縛エネルギーは $\langle R\rangle \propto a, E \propto a^{-2}$ のように振る舞います。このような性質から、この Kartavtsev と Malykh の発見した 3 粒子束縛状態は「ユニバーサル状態 (Universal state)」「ユニバーサル 3 量体 (Universal trimer)」などとも呼ばれます[44]。このように散乱長という 1 つのパラメータだけでユニバーサルに記述される点で、Efimov 状態が散乱長と 3 体パラメータ (a, Λ) という 2 つのパラメータでユニバーサルに記述されるのと対照的です[45]。3 粒子系であるにもかかわらず、3 粒子が接近した際の散乱位相シフトの情報である 3 体パラメータ Λ に依存せず、2 体散乱の情報である散乱長 a のみで記述される、というのがユニバーサル状態の特徴的な性質です。その起源にはフェルミ粒子の排他律があり、フェルミ系特有の 3 体現象だと言えます。

(iv) 連続スケール不変性を示す

散乱長を $a \to \lambda a$ とスケール変換した場合、ユニバーサル状態の波動関数やエネルギーは $\Psi(\boldsymbol{r}) \to \Psi(\lambda \boldsymbol{r}), E \to \lambda^{-2} E$ とスケール変換されます。この変換が任意の正の実数 λ に対して成立するという意味で[46]、ユニバーサル状態は連続スケール不変性を示します。これは Efimov 状態が離散スケール不変性を示すことと対照的です。

ユニバーサル状態と Efimov 状態の間のクロスオーバー　Kartavtsev と Malykh が発見した、質量比が中程度 $8.17... < M/m < 13.606...$ で現れるユニバーサル状態と、質量比が大きな領域 $M/m > 13.606...$ で現れる Efimov 状態は、上記のように大きく異なる性質を持っています。では質量比や散乱長を徐々に変化させた場合、3 粒子系はどのように振る舞うのでしょうか？そしてユニバーサル状態と Efimov 状態はどのような場合に現れるのでしょうか？

この問いに対する答えを図 26 に示します。これは、散乱長や質量比を変えながら量子 3 体問題を正確に解いた結果をまとめた概略図です [147]。$M/m > 8.172...$ において、散乱長が大きな領域では 3 粒子束縛状態が $a > 0$ で現れて、$E \propto a^{-2}$ とユニバーサル状態特有の挙動をします。しかし、散乱長を小さくしていき、ユニタリー極限から外れていくにつれて、$E \propto a^{-2}$ の挙動からずれていきます。その領域 (図 26 の緑。Crossover と表記) では、ユニバーサル状態の $E \propto a^{-2}$ や連続スケール不変性は示さないのですが、実は散乱長と 3 体パラメータ (a, Λ) でユニバーサルに記述できる領域になっていることが分かっています。そしてさらに散乱長を小さくしていくと、2 粒子束縛状態 (dimer と表記) のスペクトルとぶつかり、3 粒子束縛状態が dimer+particle へと分解してしまいます。

質量比を大きくしていくと、3 粒子束縛状態がユニバーサル状態として振る舞う領域が減少していき、クロスオーバー状態として振る舞う領域が広がっていきます。そして、特に Efimov 状態が現れる臨界質量比 13.6069... ではユニバーサル状態が消失し、クロスオーバー状態のみになります。このことは図 25 を見れば理解できます。ユニバーサル状態が散乱長のみでユニバーサルに記述できたのは、図 25 の短距離における斥力のおかげでした。質量比を増加させると、こ

[44] 発見した Kartavtsev と Malykh に敬意を表して「Kartavtsev-Malykh 状態」「Kartavtsev-Malykh trimer」と呼ぶ場合もあります。

[45] この Kartavtsev と Malykh のユニバーサル状態の性質は、むしろ散乱長が大きな領域での 2 粒子束縛状態の挙動と類似しています。実際、散乱長が大きな領域の $a > 0$ でのみ 2 体束縛状態が存在し、そのサイズやエネルギーは $\langle R\rangle \propto a, E \propto a^{-2}$ のように振る舞います。

[46] 散乱長 a が相互作用の到達距離 b よりも十分大きいという条件下で。

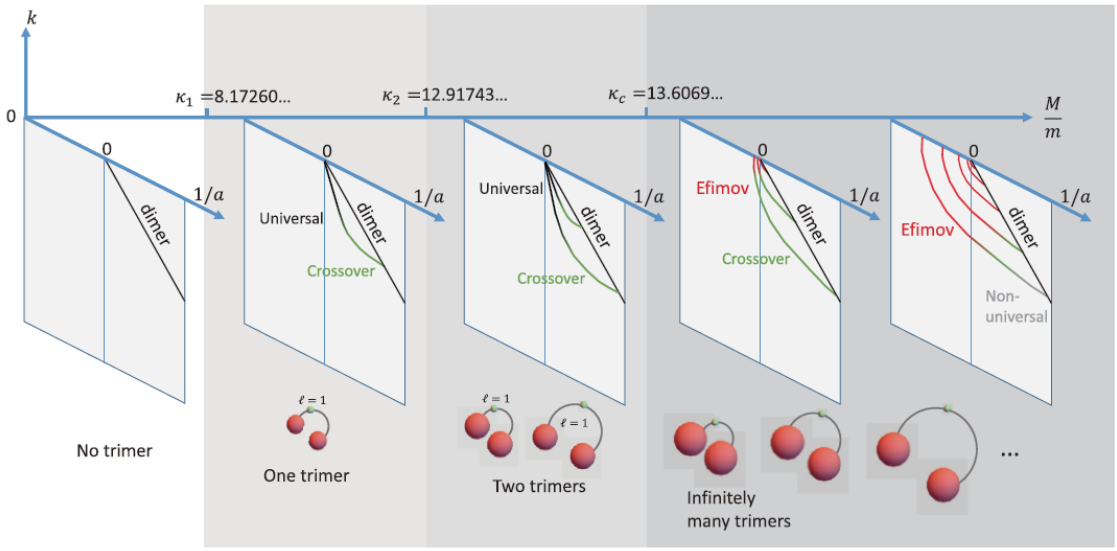


図 26: 2 identical fermion + 1 粒子系の、散乱長が大きな領域におけるユニバーサルな 3 粒子系のエネルギースペクトルの概略図。質量比が小さな領域では、散乱長が正の領域で 2 粒子束縛状態 (黒線。dimer と表記) が現れる一方、3 粒子束縛状態は現れない。質量比を大きくしていくと、$M/m > \kappa_1 = 8.17260...$ で 3 粒子束縛状態が正の散乱長領域で現れる。散乱長が非常に大きなユニタリー領域付近では、$E \propto k^2 \propto a^{-2}$ とユニバーサル状態（黒線）として振る舞う一方、ユニタリー領域から外れるとその挙動と異なる振る舞いをするクロスオーバー状態 (緑線) に変化し、最終的に dimer+particle へと分解する。質量比をさらに大きくした $M/m > \kappa_2 = 12.91743...$ では、3 粒子束縛状態が 2 つ現れる。両者とも、散乱長が正の領域で現れ、ユニタリー領域付近では Universal trimer（黒線）、ユニタリー領域から外れるとその挙動と異なる振る舞いをするクロスオーバー状態 (緑線) へと変化する。質量比をさらに大きくしていくと、この Universal trimer 領域が小さくなり、クロスオーバー状態の領域が大きくなる。特に Efimov 状態が現れる臨界質量比 $\kappa_c = 13.6069...$ では Universal trimer が消失し、クロスオーバー状態のみになる。そして $M/m > \kappa_c$ において 3 粒子束縛状態が可算無限個現れる。$M/m \gtrsim \kappa_c$ では、これらのうち Efimov trimer として離散スケール不変に振る舞う領域は小さいが、質量比を増やしていくにつれて、Efimov trimer として振る舞う領域（赤線）が拡大していく。なお、基底状態については、束縛エネルギーが大きな場合に有限レンジ効果が大きい。その領域を Non-universal（灰色線）と表記。 (図は [15] より引用。)

の短距離部分での斥力が徐々に弱くなります。すると波動関数が短距離まで侵入できるようになり、3 体パラメータ Λ にも依存するクロスオーバー状態になっていきます。

質量比をさらに大きくして、$M/m > 13.606...$ になると、元々ユニバーサル状態であった 2 つの 3 粒子束縛状態が、それぞれ基底 Efimov 状態と第一励起 Efimov 状態へと変化します。$a < 0$ でも存在できるボロミアン状態となり、さらに $M/m < 13.606...$ では存在しなかった第二励起、第三励起……状態も出現し、Efimov 状態の離散スケール不変性をユニタリー極限付近で示します。一方 $a > 0$ の領域では、離散スケール不変性を示さないクロスオーバー状態が残っています。これは、臨界質量比 $M/m = 13.606...$ において、3 粒子束縛状態がクロスオーバー状態であった名残

で、質量比を増やしていくにつれて、Efimov 状態の領域が拡大し、クロスオーバー状態の領域が減少していきます。

このように、フェルミ 3 体系は質量比や散乱長に応じて非常に興味深い振る舞いを示します。この系では、質量比を変化させることで、ユニバーサル状態の連続スケール不変性から Efimov 状態の離散スケール不変性へと、対称性が破れていっている、とも見なせます。ただしこの変化は連続的なクロスオーバーとして起こります。というのは、少数系は多体系と異なり、不連続な相転移・臨界現象が許されないからです。クロスオーバー状態は、対称性の異なるこの 2 つの量子少数状態を連続的につなぐために、必然的に現れている中間状態であるとも見なせるでしょう。

ユニバーサル状態の観測　このフェルミ系におけるユニバーサル状態、Efimov 状態、それらをつなぐクロスオーバー状態は、まだ直接観測されていません。これは、質量比が 10 程度と大きなフェルミ粒子の混合系で、なおかつ s 波散乱長が大きな系を実現する必要があるからです。冷却原子気体の実験においては、Yb 原子と Li 原子の混合気体 (質量比 ~30) が実現されており、このような系では、散乱長が大きな領域で Efimov 状態が観測できると期待されます。

一方、ユニバーサル状態については、条件がさらに厳しくなります。特に、質量比が $8.17... < M/m < 13.60...$ の系を実現しなければなりません。現在、冷却原子で実験が行われている原子の組み合わせでは ^{53}Cr 原子と ^{6}Li 原子の混合系 (質量比 8.8) がユニバーサル状態を観測しうるほぼ唯一の候補になります。この ^{53}Cr 原子と ^{6}Li 原子の混合気体は、本講義の時点 (2019 年) では未だ実現していませんでしたが、その後イタリアのグループで実現されています。

このように排他律のあるフェルミ系における 3 粒子束縛状態を直接観測することには未だ成功していませんが、間接的な観測には成功しています。図 26 に示す通り、ユニバーサル状態は散乱長を小さくしていくと、クロスオーバー状態となり、最終的に dimer+particle へと分解していきます。その分解する点付近で、dimer と particle の散乱が共鳴的に大きくなります [148, 149]。この dimer と particle の強い散乱を観測することで、ユニバーサル状態・クロスオーバー状態を観測することにインスブルック大学のグループが成功しています [150]。この dimer と particle の散乱共鳴は、s 波ではなく、p 波で起こることが、この現象の特徴です。これは、ユニバーサル状態が角運動量 $\ell = 1$ を持つ「回転している 3 粒子束縛状態」だからです。

このような間接的な証拠はあるものの、ユニバーサル状態、Efimov 状態、それらをつなぐクロスオーバー状態が冷却原子実験において、より明瞭に観測されることが待たれます。また、散乱長が大きく、かつ質量差があるフェルミ系であれば、どのような系であっても図 25 のような挙動をするため、原子核・ハドロン等の系でも類似・関連する現象がないか興味がもたれるところです。

4 体 Efimov 状態・ユニバーサル状態　排他律のあるフェルミ系において、3 粒子系ではユニバーサル状態や Efimov 状態、それらをつなぐクロスオーバー状態という興味深い現象が現れました。それでは 4 粒子系ではどのようになるのでしょうか？4 粒子フェルミ系としては、「4 identical fermion」「3 identical fermion + 1 particle」「2 identical fermion + 2 identical fermion」などの系が考えられます。このうち「4 identical fermion」は s 波で相互作用できないので、考えるべきは「3 identical fermion + 1 particle」と「2 identical fermion + 2 identical fermion」になります。

「3 identical fermion + 1 particle」系において、驚くべきことが発見されました [151]。Efimov

trimer が現れる質量比 13.606... よりわずかに小さい質量比 13.384 以上で、4 粒子の束縛状態が可算無限個現れ、Efimov 状態と同様に離散スケール不変性を示すのです。ボース粒子系では 4 体 Efimov 状態が起こらない (Sec. 6.1 参照) のとは対照的に、フェルミ 4 粒子系では 4 体 Efimov 状態が現れます。ただし、質量比が 13.384... 以上、13.606... 以下という、とても狭い領域なので、なかなか観測は難しそうです。もっと観測しやすい 4 体状態もあります。実は、4 体 Efimov 状態に付随して、「3 identical fermion + 1 particle」系では、Kartavtsev と Malykh の発見したユニバーサル状態と同じ性質をもつ 4 体束縛状態が質量比 8.8 以上で現れます [151, 152, 153]。これらの 4 体 Efimov 状態や 4 体ユニバーサル状態は、3 粒子系のものと全く同じような性質を示します。4 体ユニバーサル状態と 4 体 Efimov 状態の間にも図 26 と同様のクロスオーバー現象が現れることが予想されます。

一方、「2 identical fermion + 2 identical fermion」系においては、4 体 Efimov 状態もユニバーサル状態も現れないことが分かっています [154]。このような違いが現れる単純な理由としては、「3 identical fermion + 1 particle」系の方が重い粒子が多く、「2 identical fermion + 2 identical fermion」系に比べて束縛しやすい、ということが言えます。ただ、これらの 4 体現象は、2010 年以降に発見されたかなり新しい現象であり、定性的な理解もあまり進んでおらず、まだまだ研究途上なことが多いです。これは、節を持つフェルミ粒子系の波動関数に対して精密な量子 4 体計算を行う必要があり、それが難しいことに起因しています。

5 体、6 体……状態　フェルミ粒子系の 5 粒子以上の系で Efimov 状態やユニバーサル状態があるか否かを探った理論研究が、本講義の時点 (2019 年) では 1 つだけでした [153, 155]。この研究によると、「4 identical fermion + 1 particle」系においては、5 体ユニバーサル状態も 5 体 Efimov 状態も現れます。出現に必要な臨界質量比はそれぞれ 9.6、13.2 であることが、精密な量子 5 体計算により分かっています。この結果と、これまでに紹介した結果を表 2 にまとめます。

ここまで来ると、「5 identical fermion + 1 particle」という 6 粒子系でも 6 体ユニバーサル状態、6 体 Efimov 状態が現れるだろうと単純に予期したくなるのですが、少し注意が必要です。identical fermion の数が 4 か 5 かは、原子核の殻模型の描像では定性的に大きく異なります。4 粒子までであれば、殻模型の調和振動子の基底・第一励起準位に合計 4 つの同種フェルミ粒子 (スピン偏極) が入ることができます。しかし 5 粒子目を追加しようとすると、さらに上の準位に入れる必要があり、エネルギー的に損をしそうだ、と思えるわけです。このような考察から、Ref.[153, 155] の著者たちは 5+1 粒子系では 6 体ユニバーサル状態や 6 体 Efimov 状態は現れないだろうと予想しています。この予想が本当に正しいのかどうか？7 粒子以上ではどうなるか？など疑問はわくばかりですが、これらについては、今後の研究で明らかになることが期待されます。特に、ボース粒子系では少数系から多体系へと移行していく様子が比較的良く分かっていることに比べると (Sec. 6.2 参照)、フェルミ粒子系においては未だに分かっていないことが多く、発展途上なのが現状です。

7　まとめ

本講義録では、量子少数系の示すユニバーサルな現象、特に Efimov 状態を紹介しました。Efimov 状態は 1970 年に発見された当時は、非常に奇妙で特異な現象だと思われていました。しかし 50

表 2: s 波散乱長の大きな、質量差のある 2 成分フェルミ粒子混合系において、これまでの理論研究で分かっている N 体ユニバーサル状態・N 体 Efimov 状態の存在の有無と、その出現に必要な臨界質量比。

粒子数	ユニバーサル状態	臨界質量比	Efimov 状態	臨界質量比	文献
2+1	○	8.17	○	13.606	[146, 3, 66]
3+1	○	8.8	○	13.384	[151, 152, 153]
2+2	×	-	×	-	[154]
4+1	○	9.6	○	13.2	[153]
5+1	おそらく×	-	おそらく×	-	[153, 155]

年以上経過した現在では、冷却原子をはじめ、^{4}He 原子、中性子過剰核、^{12}C 核の Hoyle 状態、磁性体など、様々な物理系で Efimov 状態の観測や理論研究が進展しており、Efimov 状態は、階層やエネルギースケールの異なるこれらの物理系を量子少数系の観点から統一的に理解する枠組みとなっています。このことは量子多体系において、異なる階層・エネルギースケールの系を統一的に理解することを可能にしている相転移・臨界現象のユニバーサリティの概念と類似している一方、「量子少数系と多体系のユニバーサリティは果たしてどのようにつながっているのか？」という新しい疑問を提起しています。この疑問に答える様々な研究がまさに現在進展しています。さらに、Efimov 状態と異なる、新しいタイプの 3 粒子、4 粒子現象も次々に発見されています。

このように、Efimov 状態はただの 3 粒子の量子現象という枠組みを超えて、量子少数多体現象とそのユニバーサリティを理解することへとつながっています。「量子力学に従う系がどのように振る舞うか？」を理解することは、物理学にとって最も重要な課題であると言っても過言ではありません。この物理学の究極の目標を達成するための重要な一歩を Efimov が我々に与えてくれたと言えるのではないでしょうか？本講義録が、量子現象の理解を試みる物理学者の挑戦の一助になることを願っています。

謝辞

本講義ノートを作成する機会となった、京都大学基礎物理学研究所での集中講義を企画して下さった兵藤哲雄氏（首都大）に感謝いたします。また、この講義ノートを書くに当たり、様々な助言を下さった以下の方々にも、感謝いたします：萩野浩一氏（京大)、谷村雄介氏（東北大)、西浦大樹氏（東北大)、延與佳子氏 (京大)、大西明氏 (京大)、吉田賢市氏（京大)、Pascal Naidon 氏 (理研)。また、編集委員として本講義ノート作成に助言を下さった中村哲氏（東北大）に感謝を申し上げます。

参考文献

[1] V. Efimov: Phys. Lett. B **33** (1970) 563.

[2] T. Kraemer, M. Mark, P. Waldburger, J. G. Danzl, C. Chin, B. Engeser, A. D. Lange, K. Pilch, A. Jaakkola, H. C. Nägerl, and R. Grimm: Nature **440** (2006) 315.

[3] V. Efimov: Nucl. Phys. A **210** (1973) 157.

[4] R. Amado and J. Noble: Phys. Lett. B **35** (1971) 25.

[5] T. K. Lim, S. K. Duffy, and W. C. Damer: Phys. Rev. Lett. **38** (1977) 341.

[6] D. V. Fedorov, A. S. Jensen, and K. Riisager: Phys. Rev. Lett. **73** (1994) 2817.

[7] M. Zaccanti, B. Deissler, C. D ' Errico, M. Fattori, M. Jona-Lasinio, S. Müller, G. Roati, M. Inguscio, and G. Modugno: Nature Physics **5** (2009) 586.

[8] N. Gross, Z. Shotan, S. Kokkelmans, and L. Khaykovich: Phys. Rev. Lett. **103** (2009) 163202.

[9] S. E. Pollack, D. Dries, and R. G. Hulet: Science **326** (2009) 1683.

[10] M. Kunitski, S. Zeller, J. Voigtsberger, A. Kalinin, L. P. H. Schmidt, M. Schöffler, A. Czasch, W. Schöllkopf, R. E. Grisenti, T. Jahnke, et al.: Science **348** (2015) 551.

[11] V. Efimov: Nature Physics **5** (2009) 533.

[12] E. Braaten and H. W. Hammer: Phys. Rep. **428** (2006) 259.

[13] E. Nielsen, D. Fedorov, A. Jensen, and E. Garrido: Phys. Rep. **347** (2001) 373.

[14] F. Ferlaino and R. Grimm: Physics **3** (2010) 9.

[15] P. Naidon and S. Endo: Rep. Prog. Phys. **80** (2017) 056001.

[16] C. H. Greene, P. Giannakeas, and J. Pérez-Ríos: Rev. Mod. Phys. **89** (2017) 035006.

[17] J. P. D'Incao: J. Phys. B **51** (2018) 043001.

[18] L. D. Landau and E. M. Lifshitz: *Quantum mechanics: non-relativistic theory* (Butterworth-Heinemann, 1991).

[19] B. Gao: Phys. Rev. A **59** (1999) 2778.

[20] K. Huang and C. N. Yang: Phys. Rev. **105** (1957) 767.

[21] T. F. O'Malley, L. Spruch, and L. Rosenberg: J. Math. Phys. **2** (1961) 491.

[22] B. Gao: Phys. Rev. A **58** (1998) 1728.

[23] B. Gao: Phys. Rev. A **58** (1998) 4222.

[24] C. A. Regal, C. Ticknor, J. L. Bohn, and D. S. Jin: Phys. Rev. Lett. **90** (2003) 053201.

[25] E. P. Wigner: Phys. Rev. **98** (1955) 145.

[26] H.-W. Hammer and D. Lee: Ann. Phys. **325** (2010) 2212 .

[27] D. S. Petrov. "The few-atom problem", Lecture Notes of the Les Houches Summer School, 2010.

[28] P. Naidon and M. Ueda: Comptes Rendus Physique **12** (2011) 13.

[29] Y. Yamaguchi: Phys. Rev. **95** (1954) 1628.

[30] S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H. J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, and W. Ketterle: Nature **392** (1998) 151.

[31] P. Dyke, S. E. Pollack, and R. G. Hulet: Phys. Rev. A **88** (2013) 023625.

[32] S. Nascimbene, N. Navon, K. Jiang, F. Chevy, and C. Salomon: Nature **463** (2010) 1057.

[33] *The BCS-BEC Crossover and the Unitary Fermi Gas (Lecture Notes in Physics)*, ed. W. Zwerger (Springer, 10) 2012 ed.

[34] M. Horikoshi and M. Kuwata-Gonomaki: Int. J. Mod. Phys. E p. 1930001.

[35] S. E. Pollack, D. Dries, M. Junker, Y. P. Chen, T. A. Corcovilos, and R. G. Hulet: Phys. Rev. Lett. **102** (2009) 090402.

[36] I. Shimamura: JPS Journal **70** (2015) 168.

[37] C. Chin, R. Grimm, P. Julienne, and E. Tiesinga: Rev. Mod. Phys. **82** (2010) 1225.

[38] V. Gurarie and L. Radzihovsky: Ann. Phys. **322** (2007) 2.

[39] Y. Wang and P. S. Julienne: Nature Physics **10** (2014) 768.

[40] S. Roy, M. Landini, A. Trenkwalder, G. Semeghini, G. Spagnolli, A. Simoni, M. Fattori, M. Inguscio, and G. Modugno: Phys. Rev. Lett. **111** (2013) 053202.

[41] J. Johansen, B. DeSalvo, K. Patel, and C. Chin: Nature Physics **13** (2017) 731.

[42] R. Machleidt: Phys. Rev. C **63** (2001) 024001.

[43] V. G. J. Stoks, R. A. M. Klomp, C. P. F. Terheggen, and J. J. de Swart: Phys. Rev. C **49** (1994) 2950.

[44] R. B. Wiringa, V. G. J. Stoks, and R. Schiavilla: Phys. Rev. C **51** (1995) 38.

[45] N. Ishii, S. Aoki, and T. Hatsuda: Phys. Rev. Lett. **99** (2007) 022001.

[46] N. Ishii, S. Aoki, T. Doi, T. Hatsuda, Y. Ikeda, T. Inoue, K. Murano, H. Nemura, K. Sasaki, H. Q. Collaboration, et al.: Phys. Lett. B **712** (2012) 437.

[47] R. W. Hackenburg: Phys. Rev. C **73** (2006) 044002.

[48] R. Grisenti, W. Schöllkopf, J. Toennies, G. Hegerfeldt, T. Köhler, and M. Stoll: Phys. Rev. Lett. **85** (2000) 2284.

[49] S. Zeller, M. Kunitski, J. Voigtsberger, A. Kalinin, A. Schottelius, C. Schober, M. Waitz, H. Sann, A. Hartung, T. Bauer, et al.: Proc. Nat. Acad. Scii **113** (2016) 14651.

[50] M. Przybytek, W. Cencek, J. Komasa, G. Łach, B. Jeziorski, and K. Szalewicz: Phys. Rev. Lett. **104** (2010) 183003.

[51] K. T. Tang, J. P. Toennies, and C. L. Yiu: Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 1546.

[52] V. Efimov: Sov. J. Nucl. Phys **12** (1971) 101.

[53] P. Naidon, S. Endo, and M. Ueda: Phys. Rev. A **90** (2014) 022106.

[54] G. A. Skorniakov and K. A. Ter-Martirosian: Sov. Phys. JETP **4** (1957) 648.

[55] J. D'Incao, C. H. Greene, and B. Esry: J. Phys. B **42** (2009) 044016.

[56] J. Wang, J. P. D'Incao, B. D. Esry, and C. H. Greene: Phys. Rev. Lett. **108** (2012) 263001.

[57] H. Suno, B. D. Esry, C. H. Greene, and J. P. Burke: Phys. Rev. A **65** (2002) 042725.

[58] C. Chin: arXiv:1111.1484 (2011).

[59] P. K. Sørensen, D. V. Fedorov, A. S. Jensen, and N. T. Zinner: Phys. Rev. A **86** (2012) 052516.

[60] D. V. Fedorov and A. S. Jensen: Phys. Rev. Lett. **71** (1993) 4103.

[61] A. Jensen, E. Garrido, and D. Fedorov: Few-Body Systems **22** (1997) 193.

[62] J. Macek: J. Phys. B **1** (1968) 831.

[63] L. Faddeev: Sov. Phys. JETP **12** (1961) 1014.

[64] L. Thomas: Phys. Rev. **47** (1935) 903.

[65] Y. Castin and E. Tignone: Phys. Rev. A **84** (2011) 062704.

[66] D. S. Petrov: Phys. Rev. A **67** (2003) 010703.

[67] K. G. Wilson: Phys. Rev. B **4** (1971) 3174.

[68] K. G. Wilson: Phys. Rev. B **4** (1971) 3184.

[69] S. D. Głazek and K. G. Wilson: Phys. Rev. D **47** (1993) 4657.

[70] S. D. Głazek and K. G. Wilson: Phys. Rev. Lett. **89** (2002) 230401.

[71] D. A. Huse: Phys. Rev. B **24** (1981) 5180.

[72] L. W. Bruch and K. Sawada: Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 25.

[73] R. Hall and H. Post: Proc. Phys. Soc. **90** (1967) 381.

[74] J.-M. Richard: arXiv preprint nucl-th/0305076 (2003).

[75] P. M. A. Mestrom, J. Wang, C. H. Greene, and J. P. D'Incao: Phys. Rev. A **95** (2017) 032707.

[76] B. D. Esry, C. H. Greene, and J. P. Burke: Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 1751.

[77] P. F. Bedaque, E. Braaten, and H. W. Hammer: Phys. Rev. Lett. **85** (2000) 908.

[78] J. Wolf, M. Deiß, A. Krükow, E. Tiemann, B. P. Ruzic, Y. Wang, J. P. D ' incao, P. S. Julienne, and J. H. Denschlag: Science **358** (2017) 921.

[79] B. Huang, L. A. Sidorenkov, R. Grimm, and J. M. Hutson: Phys. Rev. Lett. **112** (2014) 190401.

[80] S.-K. Tung, K. Jiménez-García, J. Johansen, C. V. Parker, and C. Chin: Phys. Rev. Lett. **113** (2014) 240402.

[81] R. Pires, J. Ulmanis, S. Häfner, M. Repp, A. Arias, E. D. Kuhnle, and M. Weidemüller: Phys. Rev. Lett. **112** (2014) 250404.

[82] J. Ulmanis, S. Häfner, R. Pires, E. D. Kuhnle, Y. Wang, C. H. Greene, and M. Weidemüller: Phys. Rev. Lett. **117** (2016) 153201.

[83] S. Häfner, J. Ulmanis, E. D. Kuhnle, Y. Wang, C. H. Greene, and M. Weidemüller: Phys. Rev. A **95** (2017) 062708.

[84] T. Lompe, T. B. Ottenstein, F. Serwane, A. N. Wenz, G. Zürn, and S. Jochim: Science **330** (2010) 940.

[85] S. Nakajima, M. Horikoshi, T. Mukaiyama, P. Naidon, and M. Ueda: Phys. Rev. Lett. **106** (2011) 143201.

[86] O. Machtey, Z. Shotan, N. Gross, and L. Khaykovich: Phys. Rev. Lett. **108** (2012) 210406.

[87] R. Brühl, A. Kalinin, O. Kornilov, J. P. Toennies, G. C. Hegerfeldt, and M. Stoll: Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 063002.

[88] M. Przybytek, W. Cencek, J. Komasa, G. Łach, B. Jeziorski, and K. Szalewicz: Phys. Rev. Lett. **104** (2010) 183003.

[89] P. Naidon, S. Endo, and M. Ueda: Phys. Rev. Lett. **112** (2014) 105301.

[90] F. Hoyle: Astrophys. J. Suppl. Ser. **1** (1954) 121.

[91] A. Tohsaki, H. Horiuchi, P. Schuck, and G. Röpke: Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 192501.

[92] Y. Funaki, A. Tohsaki, H. Horiuchi, P. Schuck, and G. Röpke: Phys. Rev. C **67** (2003) 051306.

[93] H. Horiuchi, K. Ikeda, and Y. Suzuki: Prog. Theor. Phys. Suppl. **52** (1972) 89.

[94] S. Ali and A. Bodmer: Nuclear Physics **80** (1966) 99.

[95] H.-W. Hammer and R. Higa: Eur. Phys. J. A **37** (2008) 193.

[96] R. Higa, H.-W. Hammer, and U. Van Kolck: Nucl. Phys. A **809** (2008) 171.

[97] Y. Fukuoka, S. Shinohara, Y. Funaki, T. Nakatsukasa, and K. Yabana: Phys. Rev. C **88** (2013) 014321.

[98] H. Suno, Y. Suzuki, and P. Descouvemont: Phys. Rev. C **91** (2015) 014004.

[99] Y. Wang, J. Wang, J. P. D'Incao, and C. H. Greene: Phys. Rev. Lett. **109** (2012) 243201.

[100] S. Dasgupta, I. Mazumdar, and V. S. Bhasin: Phys. Rev. C **50** (1994) R550.

[101] I. Mazumdar and V. S. Bhasin: Phys. Rev. C **56** (1997) R5.

[102] I. Mazumdar, V. Arora, and V. S. Bhasin: Phys. Rev. C **61** (2000) 051303.

[103] I. Mazumdar, A. R. P. Rau, and V. S. Bhasin: Phys. Rev. Lett. **97** (2006) 062503.

[104] C. Ji, C. Elster, and D. R. Phillips: Phys. Rev. C **90** (2014) 044004.

[105] A. E. A. Amorim, T. Frederico, and L. Tomio: Phys. Rev. C **56** (1997) R2378.

[106] D. L. Canham and H.-W. Hammer: Nucl. Phys. A **836** (2010) 275.

[107] S. Mosby, N. Badger, T. Baumann, D. Bazin, M. Bennett, J. Brown, G. Christian, P. A. DeYoung, J. Finck, M. Gardner, et al.: Nucl. Phys. A **909** (2013) 69.

[108] N. Orr: EPJ Web of Conferences, Vol. 113, 2016, p. 06011.

[109] S. Leblond, F. M. Marqués, J. Gibelin, N. A. Orr, Y. Kondo, T. Nakamura, J. Bonnard, N. Michel, N. L. Achouri, T. Aumann, H. Baba, F. Delaunay, Q. Deshayes, P. Doornenbal, N. Fukuda, J. W. Hwang, N. Inabe, T. Isobe, D. Kameda, D. Kanno, S. Kim, N. Kobayashi, T. Kobayashi, T. Kubo, J. Lee, R. Minakata, T. Motobayashi, D. Murai, T. Murakami, K. Muto, T. Nakashima, N. Nakatsuka, A. Navin, S. Nishi, S. Ogoshi, H. Otsu, H. Sato, Y. Satou, Y. Shimizu, H. Suzuki, K. Takahashi, H. Takeda, S. Takeuchi, R. Tanaka, Y. Togano, A. G. Tuff, M. Vandebrouck, and K. Yoneda: Phys. Rev. Lett. **121** (2018) 262502.

[110] Y. Nishida, Y. Kato, and C. D. Batista: Nature Physics **9** (2013) 93.

[111] P. Zhang and H. Zhai: Frontiers of Physics **13** (2018) 137204.

[112] O. Ovdat, J. Mao, Y. Jiang, E. Andrei, and E. Akkermans: Nature communications **8** (2017) 507.

[113] J. Omachi, T. Suzuki, K. Kato, N. Naka, K. Yoshioka, and M. Kuwata-Gonokami: Phys. Rev. Lett. **111** (2013) 026402.

[114] S. Deng, Z.-Y. Shi, P. Diao, Q. Yu, H. Zhai, R. Qi, and H. Wu: Science **353** (2016) 371.

[115] S. Deng, P. Diao, F. Li, Q. Yu, S. Yu, and H. Wu: Phys. Rev. Lett. **120** (2018) 125301.

[116] R. D. Amado and F. C. Greenwood: Phys. Rev. D **7** (1973) 2517.

[117] L. Platter, H.-W. Hammer, and U.-G. Meißner: Phys. Rev. A **70** (2004) 052101.

[118] H. W. Hammer and L. Platter: Eur. Phys. J. A **32** (2007) 113.

[119] J. von Stecher, J. P. D'Incao, and C. H. Greene: Nature Physics **5** (2009) 417.

[120] M. Hadizadeh, M. T. Yamashita, L. Tomio, A. Delfino, and T. Frederico: Phys. Rev. Lett. **107** (2011) 135304.

[121] A. Deltuva: Europhys. Lett. **95** (2011) 43002.

[122] F. Ferlaino, S. Knoop, M. Berninger, W. Harm, J. P. D'Incao, H. C. Nägerl, and R. Grimm: Phys. Rev. Lett. **102** (2009) 140401.

[123] A. Deltuva: Few-Body Systems **54** (2013) 2419.

[124] J. von Stecher: J. Phys. B **43** (2010) 101002.

[125] J. von Stecher: Phys. Rev. Lett. **107** (2011) 200402.

[126] M. Gattobigio and A. Kievsky: Phys. Rev. A **90** (2014) 012502.

[127] Y. Yan and D. Blume: Phys. Rev. A **92** (2015) 033626.

[128] A. Zenesini, B. Huang, M. Berninger, S. Besler, H.-C. Nägerl, F. Ferlaino, R. Grimm, C. H. Greene, and J. von Stecher: New J. Phys. **15** (2013) 043040.

[129] A. N. Nicholson: Phys. Rev. Lett. **109** (2012) 073003.

[130] L. W. Bruch and J. A. Tjon: Phys. Rev. A **19** (1979) 425.

[131] T. K. Lim and P. A. Maurone: Phys. Rev. B **22** (1980) 1467.

[132] O. Kartavtsev, A. Malykh, and S. Sofianos: Sov. Phys. JETP **108** (2009) 365.

[133] H.-W. Hammer and D. T. Son: Phys. Rev. Lett. **93** (2004) 250408.

[134] O. I. Kartavtsev and A. V. Malykh: Phys. Rev. A **74** (2006) 042506.

[135] J. Levinsen, P. Massignan, S. Endo, and M. M. Parish: J. Phys. B **50** (2017) 072001.

[136] X.-J. Liu, H. Hu, and P. D. Drummond: Phys. Rev. Lett. **102** (2009) 160401.

[137] S. Endo and Y. Castin: J. Phys. A **49** (2016) 265301.

[138] R. Combescot, A. Recati, C. Lobo, and F. Chevy: Phys. Rev. Lett. **98** (2007) 180402.

[139] S. M. Yoshida, S. Endo, J. Levinsen, and M. M. Parish: Phys. Rev. X **8** (2018) 011024.

[140] M. Sun, H. Zhai, and X. Cui: Phys. Rev. Lett. **119** (2017) 013401.

[141] Y. Nishida: Phys. Rev. Lett. **109** (2012) 240401.

[142] S. Endo, A. M. García-García, and P. Naidon: Phys. Rev. A **93** (2016) 053611.

[143] S. Piatecki and W. Krauth: Nature communications **5** (2014) 3503.

[144] D. J. MacNeill and F. Zhou: Phys. Rev. Lett. **106** (2011) 145301.

[145] N. G. Nygaard and N. T. Zinner: New J. Phys. **16** (2014) 023026.

[146] O. I. Kartavtsev and A. V. Malykh: J. Phys. B **40** (2007) 1429.

[147] S. Endo, P. Naidon, and M. Ueda: Phys. Rev. A **86** (2012) 062703.

[148] J. Levinsen, T. G. Tiecke, J. T. M. Walraven, and D. S. Petrov: Phys. Rev. Lett. **103** (2009) 153202.

[149] S. Endo, P. Naidon, and M. Ueda: Few-Body Systems **51** (2011) 207.

[150] M. Jag, M. Zaccanti, M. Cetina, R. S. Lous, F. Schreck, R. Grimm, D. S. Petrov, and J. Levinsen: Phys. Rev. Lett. **112** (2014) 075302.

[151] Y. Castin, C. Mora, and L. Pricoupenko: Phys. Rev. Lett. **105** (2010) 223201.

[152] D. Blume: Phys. Rev. Lett. **109** (2012) 230404.

[153] B. Bazak and D. S. Petrov: Phys. Rev. Lett. **118** (2017) 083002.

[154] S. Endo and Y. Castin: Phys. Rev. A **92** (2015) 053624.

[155] B. Bazak: Phys. Rev. A **96** (2017) 022708.